MODULE :
RÉUSSIR SA DEUXIÈME ANNÉE

Classes préparatoires

Filière PT

Sommaire général

Chapitre 2 : intégration sur un segment

[exercices]

Chapitre 2 : intégration sur un segment

- <u>Exercice n°1</u> : Soient f et g deux éléments de $C([a\,;b],\mathbb{R})$. On suppose $g \geq 0$. Montrer que $\exists\, c \in [a\,;b], \int_a^b fg = f(c)\int_a^b g$.

* Si $\int_a^b g = 0$ alors $g = 0$ sur $[a\,;b]$ et alors $\int_a^b fg = 0 = f(c)\int_a^b g$ pour n'importe quel réel $c \in [a\,;b]$.

* Supposons que $\int_a^b g > 0$. On veut montrer que $\exists\, c \in [a\,;b] \,/\, f(c) = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} = y \in \mathbb{R}$ (notation).

L'équation $f(c) = y$ d'inconnue c admet au moins une solution $\Leftrightarrow y \in f([a\,;b])$.

***f* est continue sur [*a* ; *b*] (segment) ⇒ *f* est bornée et atteint ses bornes** et par ailleurs $f([a\,;b])$ est un intervalle (théorème des valeurs intermédiaires).

Chapitre 2 : intégration sur un segment

Conclusion : $f([a\,;b]) = [m\,;M]$ où $m = \min\limits_{[a\,;\,b]} f$ et $M = \max\limits_{[a\,;\,b]} f$. On a donc :

$\forall\, x \in [a\,;b], m \leq f(x) \leq M$
$\Rightarrow\ \forall\, x \in [a\,;b], mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$

$$\Rightarrow\ \forall\, x \in [a\,;b], m\int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M\int_a^b g$$

$\Rightarrow\ m \leq y \leq M$

et donc $y \in [m\,;M] = f([a\,;b])$.

CHAPITRE 2 : INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

- <u>Exercice n°2</u> : Soit $f \in ([0\,;1],\mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f = \frac{1}{2}$. Montrer que $\exists\, c \in\,]0\,;1[, f(x) = x$.

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x\, dx \; (= \frac{1}{2})$.

$$\Rightarrow \int_0^1 (f(x) - x)\, dx = 0.$$

Posons $g(x) = f(x) - x$: il faut montrer que $\exists\, x \in\,]0\,;1[$ tel que $f(x) \neq x$, alors $g(x) \neq 0$: **g ne s'annule pas sur]0 ; 1[. De plus, étant continue, elle est de signe constant (théorème des valeurs intermédiaires)**.

On a donc :

$*$ g continue sur $]0\,;1[$

$*$ g de signe constant sur $]0\,;1[$

$*$ $\int_0^1 g = 0$

donc théorème des trois conditions $g(x) = 0, \forall\, x \in\,]0\,;1[$

$\Leftrightarrow \forall\, x \in\,]0\,;1[, f(x) = x$. D'où la contradiction car on a supposé $f(x) \neq x$.

D'où $\exists\, c \in\,]0\,;1[$ tel que $f(x) = x$.

Chapitre 2 : intégration sur un segment

- Exercice n°3 : Soit $f \in C([a\,;b], \mathbb{R})$. On pose $\forall\, n \in \mathbb{N},\, I_n = \int_a^b f^n(t)\,dt$. On suppose que f est positive. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\, I_n I_{n+2} \geq (I_{n+1})^2$. A prouver : $\left(\int_a^b f^{n+1}\right)^2 \leq \int_a^b f^n \times \int_a^b f^{n+2}$.

Remarque : quand produit d'intégrales, penser à Cauchy-Schwarz.

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\boxed{\left|\int_a^b fg\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \times \sqrt{\int_a^b g^2}\,.}$$

Chapitre 2 : intégration sur un segment

Posons $u = f^{\frac{n}{2}}$ et $v = f^{\frac{n+2}{2}} = f^{\frac{n}{2}+1}$, ça a un sens car f reste positive sur $[a\,;b]$.

Condition suffisante : $0 \leq \left|\int_a^b uv\right| \leq \sqrt{\int_a^b u^2} \times \sqrt{\int_a^b v^2}$,

soit $\left(\int_a^b f^{n+1}\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^n\right)\left(\int_a^b f^{n+2}\right)$.

Chapitre 2 : intégration sur un segment

- Exercice n°3 : Soit f définie sur à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

  a) On suppose que f est continue par morceaux. Montrer que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

f est CPM sur $[0\,;1]$ donc bornée et atteint ses bornes :
$f([0\,;1]) = [m\,;M] \Rightarrow \forall\, x \in [0\,;1], m \leq f(x) \leq M$.

$$|I_n| = \left|\int_0^1 x^n f(x)dx\right| \leq \int_0^1 |x^n f(x)|dx \leq M \int_0^1 x^n\,dx = M\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow 0 \leq |I_n| \leq \frac{M}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes : $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Chapitre 2 : intégration sur un segment

b) On suppose que f est continue par morceaux. Montrer que $I_n \sim \frac{f(1)}{n}$ en $+\infty$.

Remarque : si f était supposée C^1, on aurait fait une IPP.

$$\frac{f(1)}{n+1} = \int_0^1 f(1)x^n dx$$

donc $I_n - \frac{f(1)}{n+1} = \int_0^1 \big(f(x) - f(1)\big)\, x^n\, dx$.

Il suffit de montrer que $\int_0^1 g(x)x^n dx = \circ\left(\frac{1}{n}\right)$ ou encore que :

$n\ \int_0^1 g(x)\, x^n\ dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ($g(1) = 0$ et x^n suite géométrique).

Soit $\varepsilon > 0$, g est continue sur $[0\,;1]$ et $g(1) = 0$ donc $\exists\, \alpha > 0, \forall\, x \in [1-\alpha\,;1],\ g(x) \leq \varepsilon$.

$\forall\, x \in [0\,;1],\ |x-1| \leq \alpha \Rightarrow 1-\alpha \leq x \leq 1+\alpha$

et $n\int_0^1 g(x)x^n dx = n\int_0^{1-\alpha} g(x)x^n dx + n\int_{1-\alpha}^1 g(x)x^n dx$

Chapitre 2 : intégration sur un segment

donc $\left|n\int_0^1 g(x)x^n dx\right|$

$$\leq n\int_0^{1-\alpha}|g(x)|x^n dx + n\int_{1-\alpha}^1 |g(x)|x^n dx$$

$$\leq n\,M_1\int_0^{1-\alpha} x^n dx + n\,\varepsilon\int_{1-\alpha}^1 x^n dx$$

$$\leq n\,M_1\,\frac{(1-\alpha)^{n+1}}{n+1} + n\,\varepsilon\int_0^1 x^n\,dx$$

car $\int_{1-\alpha}^1 (fct^\circ\, positive) \leq \int_0^1 (fct^\circ\, positive)$

donc : $\left|n\int_0^1 g(x)x^n dx\right| \leq M_1(1-\alpha)^{n+1} + \varepsilon.$

Or, $M_1(1-\alpha)^{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $(1-\alpha) \in [0\,;1[$ donc $\exists\, N \in \mathbb{N}, \forall\, n \in \mathbb{N}, M_1(1-\alpha)^{n+1} \leq \varepsilon$ [définition d'une suite qui tend vers 0].

Chapitre 2 : intégration sur un segment

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \left| n \int_0^1 g(x) x^n dx \right| \leq 2\varepsilon.$

Conclusion : $n \int_0^1 g(x) x^n dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

D'où $I_n \sim \frac{f(1)}{n}$ en $+\infty$.

CHAPITRE 2 :
INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

c) On suppose f de classe C^2. Montrer que $I_n = \frac{f(1)}{n} - \frac{f(1)+f'(1)}{n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Remarque : la 1ère IPP fait sortir le 1er terme, une 2ème IPP fait sortir le 2ème terme, …

* <u>1ère IPP</u> : on pose : $\begin{cases} u(x) = f(x) \Rightarrow u'(x) = f'(x) \\ v'(x) = x^n \Rightarrow v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$

$$\Rightarrow I_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} f(x)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1} f'(x)\,dx.$$

Chapitre 2 : intégration sur un segment

$*$ 2ème IPP : $\begin{cases} u(x) = f'(x) \Rightarrow u'(x) = f''(x) \\ v'(x) = x^{n+1} \Rightarrow v(x) = \frac{x^{n+2}}{n+2} \end{cases}$.

$$\Rightarrow I_n = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\left(\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 - \frac{1}{n+2}\int_0^1 x^{n+2} f''(x)\,dx\right)$$

$$= \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\left[\frac{f'(1)}{n+2} - \frac{1}{n+2}\int_0^1 x^{n+2} f''(x)\,dx\right]$$

$$= \frac{f(1)}{n+1} - \frac{f'(1)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 x^{n+2} f''(x)dx$$

Appelons $J_n = \int_0^1 x^{n+2} f''(x)\,dx$.

On a : $|J_n| \leq \int_0^1 x^{n+2}\, |f''(x)|\,dx$

$\leq sup|f''| \times \int_0^1 x^{n+2}\,dx$ (sup sur $[0\,;1]$).

Chapitre 2 : intégration sur un segment

$$\boxed{\int_a^b fg \leq sup|f| \times \int_a^b |g| \; avec\; f \;et\; g\; CPM([a\,;b],\mathbb{R})}$$

or $sup|f''| \times \int_0^1 x^{n+2}\,dx = \frac{1}{n+3} sup|f''|$ sur $[0\,;1]$.

donc $J_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

donc $\quad I_n = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{f'(1)}{(n+1)(n+2)} + \circ\,(\frac{1}{(n+1)(n+2)})$

$\Rightarrow I_n = \frac{f(1)}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \frac{f'(1)}{n^2} \times \frac{1}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\Rightarrow I_n = \frac{f(1)}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{f'(1)}{n^2}\big(1 + (1)\big) + \circ\,(\frac{1}{n^2})$

$\Rightarrow I_n = \frac{f(1)}{n} - \frac{f'(1)+f(1)}{n^2} + (\frac{1}{n^2})$.

[DL de $\frac{1}{1+u} = 1 - u + \circ\,(u)$ pour $u \to 0$]

Chapitre 2 : intégration sur un segment

- Exercice n°4 : Pour $0 < a < b$, déterminer $\lim_{x \to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

$$t - \frac{t^3}{3!} \leq \sin t \leq t \quad t \geq 0$$

car : $$\boxed{\boldsymbol{\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + (t^5)}}.$$

Chapitre 2 : intégration sur un segment

$$\forall\, t > 0, \qquad 1 - \frac{t^2}{6} \leq \frac{\sin t}{t} \leq 1$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{t} - \frac{t}{6} \leq \frac{\sin t}{t} \leq \frac{1}{t}$$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{1}{12}[t^2]_{ax}^{bx} \leq \int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2} \leq \ln(\frac{b}{a})$ (en intégrant).

Or, $\lim_{x \to 0^+} (x^2(b^2 - a^2)) = 0$.

D'où d'après le théorème des gendarmes, $\int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2} dt$ admet une limite et cette limite vaut $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$quand $x \to 0^+$.

FIN