MODULE :
RÉUSSIR SA DEUXIÈME ANNÉE

Classes préparatoires

Filière PT

SOMMAIRE GÉNÉRAL

Chapitre 3 : intégrales impropres

[exercices]

Chapitre 3 : intégrales impropres

<u>Exercice n°1</u> : Montrer que : $\ln(1+\frac{\sin t}{\sqrt{t}}) \sim \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ en $+\infty$; $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$ converge ; $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right) dt$ diverge.

$*$ $\ln(1+u) \sim u$ avec $u \to 0$. Or, $\frac{\sin t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ car $\frac{\text{fct° bornée}}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

$*$ $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$:

- $0 \leq \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$ car $t > 0$. Or, $\int_1^X \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \left[2\sqrt{t}\right]_1^X = 2\sqrt{X} - 2 \xrightarrow[X\to+\infty]{} +\infty$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ diverge. Mauvaise méthode.

Chapitre 3 : intégrales impropres

- IPP : $\begin{cases} u(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} = t^{-1/2} \Rightarrow u'(t) = -\dfrac{1}{2}t^{-3/2} = -\dfrac{1}{2t^{3/2}} \\ v'(t) = \sin t \Rightarrow v(t) = -\cos t \end{cases}$

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = = \left[\dfrac{-\cos t}{t^{1/2}}\right]_1^{+\infty} - \dfrac{1}{2}\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos t}{t^{3/2}}\, dt.$

On a : $\dfrac{-\cos t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc d'après le théorème d'IPP, $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ et $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos t}{t^{3/2}} dt$ ont la même nature. Et $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos t}{t^{3/2}} dt$ est absolument convergente donc convergente car $0 \leq \dfrac{|\cos t|}{t^{3/2}} \leq \dfrac{1}{t^{3/2}}$ et $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^{3/2}} dt$ converge d'après le critère de Riemann ($\frac{3}{2} > 1$). D'où $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ converge.

Chapitre 3 :
intégrales impropres

$*\ \int_1^{\to+\infty} \ln(1+\frac{\sin t}{\sqrt{t}})\,dt$ divergente :

- On ne peut pas appliquer le critère d'équivalence car problème de signe $\ln(X) < 0$ quand $X < 1$ et $\ln(X) > 0$ quand $X > 0$.

En effet, $\ln\left(1+\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right) = f(t) \sim \frac{\sin t}{\sqrt{t}} = g(t)$ en $+\infty$, soit $f \sim g$ en $+\infty$ or f (ou g) ne garde pas un signe constant au voisinage de $+\infty$.

Critère d'équivalence (théorème) :

Soient f, g $CM([a\,;b[,\mathbb{R})$. On suppose que $f \sim g$ en b^- et f (ou g) garde un signe constant au voisinage de b^-, alors $\int_a^{\to b} f$ et $\int_a^{\to b} g$ ont même nature.

Chapitre 3 : intégrales impropres

- On a : $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + O(u^3)$ en 0. Mieux, il existe une fonction $B :]-1\,;\,+\infty[\to \mathbb{R}$ bornée telle que : $\forall\, n > -1, \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + u^3 B(u)$ $\forall\, u \in]-1\,;\,+\infty[\,\backslash\{0\}$.

$B(u) = \frac{1}{u^3}[\ln(1+u) - u + \frac{u^2}{2}]$ et $B(0) = \frac{1}{3}$ car $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \circ\,(u^3)$.

B est continue sur $]-1\,;\,+\infty[$ et **bornée** $\Rightarrow$ $\exists\, M > 0, \forall\, u \in]-1\,;\,+\infty[, |B(u)| \leq M$.

Donc $\forall\, t \geq 1$, $\ln(1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}}) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} - \frac{\sin^2 t}{2t} + \frac{sin^3 t}{t^{\frac{3}{2}}} B\left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)$ avec $\frac{\sin t}{\sqrt{t}} \in]-1\,;\,+\infty[$.

Chapitre 3 : intégrales impropres

Donc,

$\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right) dt = \int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}} - \frac{sin^2 t}{2t} + \frac{sin^3 t}{t^{3/2}} B\left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)\right)\ dt.$

- $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ converge d'après la question précédente.
- $\int_1^{+\infty} \frac{sin^3 t}{t^{3/2}}\ B\left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right) dt$: elle est absolument convergente donc convergente. En effet, $0 \leq \left|\frac{sin^3 t}{t^{3/2}} B\left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)\right| \leq \frac{M}{t^{3/2}}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{M}{t^{3/2}} dt$est convergente (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$).
- $\int_1^{+\infty} \frac{sin^2 t}{t}\ dt$: $\frac{sin^2 t}{t} = \frac{1-\cos(2t)}{2t}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t} dt$ est divergente (Riemann) et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{2t} dt$ est convergente (IPP).

<u>IPP</u> : on pose : $\begin{cases} u(t) = \frac{1}{2t} \Rightarrow u'(t) = -\frac{1}{2t^2} \\ v'(t) = \cos(2t) \Rightarrow v(t) = \frac{\sin(2t)}{2} \end{cases}.$

Chapitre 3 : intégrales impropres

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\, dt = \left[\frac{\sin(2t)}{4t}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{4t^2} dt$ et $\frac{\sin(2t)}{4t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$: limite finie.

Donc d'après le théorème d'IPP, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t^2} dt$ ont la même nature.

Or, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t^2} dt$ est absolument convergente car $0 \leq \frac{\sin(2t)}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge d'après Riemann $(2 > 1)$. Donc d'après le critère de convergence, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt$ converge et on a :

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt\,.$$

Chapitre 3 : intégrales impropres

Critère de convergence (théorème) :

Soient $f, g \in CM([a\,;b[, \mathbb{R})$. On suppose $\forall\, t \in [a\,;b[$, $0 \leq f(t) \leq g(t)$.

i. Si $\int_a^{b} g$ converge alors $\int_a^{b} f$ converge et on a : $0 \leq \int_a^{\to b} f \leq \int_a^{\to b} g$.

ii. Si $\int_a^{\to b} f$ diverge alors $\int_a^{\to b} g$ diverge.

Donc, on a : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t}$ divergente et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt$ convergente donc $\int_1^{+\infty} \frac{sin^2 t}{t} dt$ est divergente.

D'où, $\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right) dt$ diverge.

Chapitre 3 : intégrales impropres

- <u>Exercice n°2</u> : Existence et calcul de $J_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-ax} \cos(x)\ dx$.

Remarques : pas de problème en 0 mais problème en $+\infty$. Et comme il y a du « $cos(x)$ » (qui change de signe), on prend la valeur absolue.

On pose $f(x) = x^n e^{-ax}$. $0 \leq |f(x)| \leq x^n e^{-ax}$ et $0 \leq e^{-ax} x^n = \circ\left(\frac{1}{x^2}\right)$ car $x^{n+2} e^{-ax} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge d'après Riemann donc $\int_1^{+\infty} e^{-ax} x^n\, dx$ converge aussi car pas de problème en 0.

(En effet, $e^{-ax} x^n$ est continue sur [0 ; 1] donc $\int_0^1 e^{-ax} x^n dx$ existe).

<u>Conclusion</u> : $\int_0^{+\infty} |f|$ existe donc $\int_0^{+\infty} f$ existe.

Chapitre 3 : intégrales impropres

- Exercice n°3 : Nature de $\int_0^{+\infty}(1+t\ln(\frac{t}{t+1}))\,dt$.

➢ Problème en 0 : $f(t) = 1 + t\ln t - t\ln(t+1)$.

Or, $\lim_{t\to 0}(t\ln(t)) = 0$ car en posant $u = \frac{1}{t}$ avec $\lim_{t\to 0} u = +\infty$, on a :

$t\ln t = \frac{1}{u} \times \ln(\frac{1}{u}) = -\frac{\ln u}{u} \xrightarrow[u\to+\infty]{} 0$,

Donc $\lim_{t\to 0} f(t) = 1$ donc $\int_0^{+\infty} f$ est faussement impropre en 0.

➢ Problème en $+\infty$: $f(t) = 1 - t\ln\left(\frac{t+1}{t}\right) \Rightarrow f(t) = 1 - t\ln(1+\frac{1}{t})$. $\frac{1}{t} \xrightarrow[+\infty]{} 0$ donc $t\ln(1+\frac{1}{t}) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. Donc $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1$.

Chapitre 3 : intégrales impropres

On ne peut pas ajouter les équivalents mais on peut ajouter les limites. Pour trouver un équivalent de f en $+\infty$, on fait un DL de $\ln(1+\frac{1}{t})$.

$$f(t) = 1 - t\,(\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + \circ\left(\frac{1}{t^2}\right))$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2t} + \circ\,(\frac{1}{t})$$

$$\Rightarrow f(t) \sim \frac{1}{2t}.$$

De plus, est de signe constant car $t > 0$, donc $\int_0^{+\infty} f$ a la même nature que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2t}\,dt$ qui, elle, est divergente d'après Riemann.

D'où $\int_0^{+\infty} f$ est divergente.

Chapitre 3 : intégrales impropres

Critère de Riemann :

- $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.
- $\int_0^{1} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$.
- $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est toujours divergente.

Remarque pour cet exercice :

On ne peut pas encadrer $ln(1+u)$ avec les inégalités de Taylor :

$$u - \frac{u^2}{2} \leq ln(1+u) \leq u\,.$$

Problème ici car la fonction tend vers $-\infty$ en 0 et on ne peut pas minorer la fonction par une fonction polynôme qui, elle admet une limite finie en 0. C'est faux.

Chapitre 3 : intégrales impropres

- <u>Exercice n°4</u> : Limite de $\frac{\ln(\sin x)}{\ln x}$ quand $x \to 0^+$.

$$\frac{\ln(\sin x)}{\ln x} = \frac{\ln x + \ln(\frac{\sin x}{x})}{\ln x} = 1 + \frac{\ln(\frac{\sin x}{x})}{\ln x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1.$$

Donc : $\ln(\sin x) \sim \ln(x)$ en 0.

Chapitre 3 : intégrales impropres

- Exercice n°5 : Intégrales de Wallis.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} cos^n t\, dt$, $J_n = \int_0^{\pi/2} sin^n t\, dt$ et $K_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\, dt$.

1) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $I_n = J_n$ et $K_n = I_{2n+1}$:

$*$ On passe d'une intégrale à l'autre par un changement de variable (un changement de variable conserve les bornes). On pose : $u = \frac{\pi}{2} - t$ et $du = -dt$.

$J_n = \int_0^{\pi/2} sin^n t\ dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 sin^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right) du =$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(u)\, du$. Comme u est une variable muette, on peut écrire $J_n = \int_0^{\pi/2} cos^n t\, dt = I_n$.

CHAPITRE 3 : INTÉGRALES IMPROPRES

$* \, J_n = \int_0^{\pi/2} cos^{2n+1} t \, dt = \int_0^{\pi/2} (cos^2 t)^n \cos t \, dt$
$= \int_0^{\pi/2} (1 - sin^2 t)^n \cos t \, dt = \int_0^1 (1 - u^2)^n du = K_n.$

2) Prouver que la suite est (I_n) pour $n \geq 0$ décroissante et en déduire qu'elle converge :

On a : $\forall \, n \in \mathbb{N}, \forall \, t \in \left[0 \, ; \, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq cos^{n+1} \, t \leq cos^n t$ d'où en intégrant l'encadrement sur $\left[0 \, ; \, \frac{\pi}{2}\right]$: $\forall \, n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_{n+1} \leq I_n$, ce qui prouve que la suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.

Chapitre 3 : intégrales impropres

3) Obtenir l'encadrement : $\forall\, a \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right], 0 \leq I_n \leq a + \frac{\pi}{2} cos^n a$ puis en déduire que $I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$:

$*$ Soit a un réel de $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$. Effectuons la découpe : $0 \leq I_n = \int_0^a cos^n t\, dt + \int_a^{\pi/2} cos^n t\, dt$ et majorons par 1 dans la 1ère intégrale et par cos^n dans la 2nde (la fonction est décroissante sur $\left[a\,;\,\frac{\pi}{2}\right] \subset \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$).

Donc :

$$0 \leq I_n \leq \int_0^a 1\, dt + \int_a^{\frac{\pi}{2}} cos^n a\, dt = a + \left(\frac{\pi}{2} - a\right) cos^n a$$

$$\leq a + \frac{\pi}{2} cos^n a.$$

Chapitre 3 : intégrales impropres

$*$ Soit $\varepsilon > 0$. Appliquons l'encadrement précédent à $\frac{\varepsilon}{2} = a$. On obtient $\forall\, n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi}{2} cos^n(\frac{\varepsilon}{2})$.

Comme $0 < \cos(\frac{\varepsilon}{2}) < 1$, la suite $\left(\frac{\pi}{2} cos^n(\frac{\varepsilon}{2})\right)_{n \geq \mathbb{N}}$ converge vers 0 et donc :

$$\exists\, N \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq N, \qquad \frac{\pi}{2} cos^n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi $\forall\, n \geq N$, on a : $0 \leq I_n \leq \varepsilon$.

On a prouvé : $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq N, 0 \leq I_n \leq \varepsilon$.

Autrement dit, $I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

CHAPITRE 3 : INTÉGRALES IMPROPRES

- Exercice n°6 : $f : \left(\begin{smallmatrix}[1\,;+\infty[\to\mathbb{R} \\ t\to\frac{1}{t^2}\end{smallmatrix}\right)$. $\int_1^{+\infty} f$ converge-t-elle ?

Soit $x \geq 1, \int_1^x f(t)dt = \int_1^x \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$

Ainsi, $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et vaut 1.

- Exercice n°7 : $g : \left(\begin{smallmatrix}[1\,;+\infty[\to\mathbb{R} \\ t\to\frac{1}{t}\end{smallmatrix}\right)$ $\int_1^{+\infty} g$ est-elle convergente ?

Soit $x \geq 1, \int_1^x g = \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ n'a pas de sens.

Chapitre 3 : intégrales impropres

- <u>Exercice n°8</u> : cos : $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

Pour $X \geq 0$, $\int_0^X \cos t\, dt = \sin X$ n'a pas de limite finie

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \cos t\, dt$ n'existe pas.

- <u>Exercice n°9</u> : $h(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$. $\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge-t-elle ?

Pour $x \in]0\,;1]$, $\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 2$

$\Rightarrow \int_{\to 0}^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ existe et vaut 2.

FIN

~~~
~~~