MODULE :
RÉUSSIR SA DEUXIÈME ANNÉE

Mathématiques en Classes préparatoires

Filière PT

Sommaire général

Chapitre 4 : séries numériques

CHAPITRE 4 : SÉRIES NUMÉRIQUES

Objectif du cours :

Le concept de série numérique a pour but de donner un sens précis à la notion de somme d'une infinité de termes réels ou complexes. Par exemple, on a pour tout entier n non nul, l'égalité :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}.$$

Chapitre 4 : séries numériques

<u>Convergence d'une série numérique</u> :

Soit $(u_n)_{n\geq\mathbb{N}}$ une suite de réels ou de complexes. On lui associe la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier par :

$$S_N = u_0 + u_1 + \cdots + u_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$$

de sorte que $S_0 = u_0$, $S_1 = u_0 + u_1$, etc.

- Définition :

- Le réel ou complexe S_N s'appelle la **somme partielle d'ordre N** de la **série de terme général u_n**.
- Lorsque la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ possède une limite finie quand N tend vers $+\infty$, on dit que la série de terme général u_n, que l'on note $\sum u_n$ ou $\sum_{n\geq 0} u_n$, est **convergente**.
- Dans le cas contraire, la série $\sum u_n$ est dite **divergente**.
- Lorsque la série $\sum u_n$ est convergente, la limite $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N$ s'appelle **somme** de la série $\sum u_n$ et se note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Chapitre 4 : séries numériques

Remarques :

$*$ Il faut bien comprendre que la notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ n'est pas une somme au sens usuel. C'est la limite, lorsqu'elle existe, de la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$. Tous les théorèmes qui vont suivre concernent donc les limites de suites numériques.

$*$ Lorsque la série $\sum u_n$ est convergente, et si on note $S = \lim_{N\to+\infty} S_N = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, on peut définir le **reste d'ordre *N*** de la série $\sum u_n$ par :

$$R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \,.$$

On voit immédiatement que $R_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.

$*$ La **nature** d'une série $\sum u_n$ est son caractère convergent ou divergent. Et on dira que deux séries sont de la même nature si elles sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.

CHAPITRE 4 : SÉRIES NUMÉRIQUES

Exemple :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = n$. La somme partielle d'ordre N de la série $\sum u_n$ s'exprime en fonction de N :

$$\forall\, N \in \mathbb{N},\ S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}.$$

Ainsi $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$ donc la série $\sum u_n$ diverge.

Chapitre 4 : séries numériques

<u>Quelques propriétés</u> :

- <u>Théorème 1</u> :

Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Preuve :

Il suffit de remarquer que pour tout entier n non nul :

$$\boxed{u_n = S_n - S_{n-1}}$$

où on a noté S_n la somme partielle d'ordre n de $\sum u_n$. Ainsi, si $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S - S = 0$.

Chapitre 4 : séries numériques

Remarques :

Lorsque la suite (u_n) ne tend pas vers 0, la série $\sum u_n$ est donc divergente. On dit dans ce cas que la série $\sum u_n$ est **grossièrement divergente**. Par exemple, la série $\sum(-1)^n$ est grossièrement divergente car son terme général $(-1)^n$ ne tend pas vers 0.

Le fait que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ est une condition **nécessaire** pour que la série $\sum u_n$ soit convergente, mais ça n'est pas une condition **suffisante**. En effet, la série harmonique diverge bien que son terme général $\frac{1}{n+1}$ tende vers 0.

Chapitre 4 : séries numériques

- <u>Théorème 2 (combinaisons linéaires)</u> :

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques, et $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

i. Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum \lambda u_n$ converge et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

ii. Si $\sum u_n$ diverge, et si $\lambda \neq 0$ alors $\sum \lambda u_n$ diverge.

iii. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent toutes deux, alors $\sum (u_n + v_n)$ converge et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

iv. Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.

v. Dans le cas d'une suite (z_n) complexe, $z_n = a_n + ib_n$, avec $a_n \in \mathbb{R}$ et $b_n \in \mathbb{R}$, on a : $\sum z_n$ converge $\Leftrightarrow$ ($\sum a_n$ converge et $\sum b_n$ converge), et si c'est le cas, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

CHAPITRE 4 : SÉRIES NUMÉRIQUES

Preuve :

Notons respectivement S_N, S'_N, T_N et R_N les sommes partielles d'ordre N des séries $\sum u_n, \sum \lambda u_n, \sum v_n$ et $\sum(u_n + v_n)$, ainsi que S, S', T et R leurs sommes lorsqu'elles convergent. Soit $N \in \mathbb{N}$.

i. $S'_N = \sum_{n=0}^{N} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{N} u_n = \lambda S_N$ et donc la suite (S'_N) est convergente et $S' = \lambda S$.

ii. De $S'_N = \lambda S_N$, on en déduit que la suite (S'_N) diverge.

iii. $R_N = \sum_{n=0}^{N}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{N} u_n + \sum_{n=0}^{N} v_n = S_N + T_N$ donc la suite (R_N)est convergente de limite $R = S + T$.

iv. On peut raisonner par l'absurde en supposant que la suite (R_N) est convergente. Alors il en va de même de la suite de terme général $T_N = R_N + S_N$ ce qui est une contradiction car elle est supposée divergente.

v. On a $Z_N = A_N + iB_N$ pour tout entier N, d'où le résultat.

Chapitre 4 : séries numériques

Remarques :

On retient le point *(iii)* sous la forme suivante :

Si deux des trois séries sont convergentes, alors la troisième aussi et on a la **formule d'éclatement** : $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Attention aux éclatements illicites. On a vite fait d'écrire : $1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2}$

Or, le dernier terme écrit n'a aucun sens, puisque les séries $\sum \frac{1}{n+1}$ et $\sum \frac{1}{n+2}$ sont divergentes.

Chapitre 4 : séries numériques

- Théorème 3 (séries géométriques) :

Soit $r \in \mathbb{C}$. La série $\sum r^n$ converge $\Leftrightarrow$ $|r| < 1$. Si $|r| < 1$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.

Preuve :

Si $|r| \geq 1$, la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 donc la série $\sum r^n$ diverge grossièrement. Si $|r| < 1$, la N-ième somme partielle de $\sum r^n$ est :

$S_N = \sum_{n=0}^{N} r^n = \frac{1-r^{N+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r} - \frac{r^{N+1}}{1-r} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{1-r}$ et donc la série $\sum r^n$ converge, de somme $\frac{1}{1-r}$.

Les séries géométriques, avec les séries de Riemann, sont les séries de base auxquelles on essaie souvent de se ramener.

Chapitre 4 : séries numériques

- <u>Influence des paramètres</u> :

La nature d'une série est indépendante de ses premiers termes, ainsi que de l'indice de départ.

Par exemple, si $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$, on posera, pour tout $N \geq 1$, $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ s'appelle encore série harmonique.

- <u>Théorème 4</u> :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites égales à partir d'un certain rang. Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de la même nature.

Pour tout entier p, les séries $\sum u_n$ et $\sum u_{n+p}$ sont de la même nature.

Chapitre 4 : séries numériques

Preuve :

i. Notons respectivement S_N et T_N les sommes partielles d'ordre N des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

On suppose que $\forall\, n \geq n_0,\ u_n = v_n$. On a alors $\forall\, N \geq n_0$, $S_N - T_N = \sum_{n=0}^{N}(u_n - v_n) = \sum_{n=0}^{n_0-1}(u_n - v_n) = \lambda$ et λ est une constante. $\forall\, N \geq n_0,\ S_N = T_N + \lambda$, ce qui prouve que (S_N) converge $\Leftrightarrow$ (T_N) converge.

ii. Notons $w_n = u_{n+p}$ pour tout entier n, ainsi que R_N la somme partielle d'ordre N de $\sum w_n$. On a $R_N = \sum_{n=0}^{N} w_n = \sum_{n=0}^{N} u_{n+p} = \sum_{n=p}^{N+p} u_n = S_{N+p} - S_{p-1}$ et on en déduit que (R_N) converge $\Leftrightarrow$ (S_N) converge.

Remarque :

Si la nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes, en cas de convergence la somme, elle, dépend de tous les termes.

Chapitre 4 : séries numériques

Séries à termes positifs :

- Définition :

On dit que la série est une **série à termes positifs** (STP) lorsque (u_n) est une suite de réels positifs ou nuls.

Remarques :

* Puisqu'on a $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$ pour tout entier n, on voit que :

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Soit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, et alors elle converge (et ainsi $\sum u_n$ converge), soit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, et alors elle tend vers (et alors $\sum u_n$ diverge).

* On peut facilement adapter ce résultat à :

- Des séries à termes négatifs. Poser de sorte que est une STP.
- Des séries à termes positifs à partir d'un certain rang, ie lorsque $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq n_0, u_n \geq 0$ (théorème 4).

Chapitre 4 :
séries numériques

- Théorèmes de comparaison :
- Théorème 5 (théorème de comparaison) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$:

i. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et $0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

ii. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Preuve :

(i) Notons respectivement les sommes partielles d'ordre N des séries et. Les suites sont croissantes car les séries et sont des STP. Par hypothèse, la suite converge vers une limite notée . On a donc :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, 0 \leq S_N \leq T_N \leq T.$$

Ainsi, la suite (S_N) est croissante et majorée par T, elle est donc convergente et sa limite S vérifie $0 \leq S \leq T$:

(ii) est l'énoncé contraposé de (i).

CHAPITRE 4 : SÉRIES NUMÉRIQUES

Remarques :

∗ Pour retenir le théorème : « majorer par une série convergente » ou « minorer par une série divergente ».

∗ Le théorème 5 ne dit pas, que si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge. Il ne dit pas non plus que si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n$ diverge.

∗ Le résultat est encore vrai si l'encadrement n'a lieu qu'à partir d'un certain rang : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq v_n$.

De même, on peut supposer que l'on a $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n \leq u_n \leq 0$ (adapter l'encadrement des sommes).

∗ Lorsqu'on applique ce théorème, on écrira **toujours** la première inégalité $0 \leq u_n$ même si elle est évidente.

CHAPITRE 4 : SÉRIES NUMÉRIQUES

Exemple :

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n\, 2^n}$.

Posons, pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{\ln n}{n\, 2^n}$. On a, pour tout entier n non nul, $0 \leq \ln n \leq n$ et donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^n}$. De plus, la série est une série géométrique convergente (théorème 3), on peut donc appliquer le théorème de comparaison :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n\, 2^n} \text{ est convergente et}$$

$$0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n\, 2^n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Chapitre 4 : séries numériques

- Théorème 6 (théorème de domination) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites positives. On suppose que $u_n = O(v_n)$ en $+\infty$.

i. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
ii. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Preuve :

$u_n = O(v_n)$ en $+\infty$ signifie qu'il existe un réel positif M tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(0 \leq) u_n \leq M v_n$. Alors :

i. Si $\sum v_n$ converge alors $\sum M v_n$ converge donc d'après le théorème de comparaison, $\sum u_n$ converge.
ii. est la contraposée de (i).

Remarque :

Si on a $u_n = \circ\,(v_n)$ en $+\infty$ alors $u_n = O(v_n)$ en $+\infty$ et donc le résultat précédent s'applique encore.

CHAPITRE 4 : SÉRIES NUMÉRIQUES

- Théorème 7 (critère d'équivalence) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites **positives** équivalentes en $+\infty$.

Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de la même nature.

Preuve :

L'hypothèse $u_n \sim v_n$ en $+\infty$ entraîne à la fois $u_n = O(v_n)$ en $+\infty$ et $v_n = O(u_n)$ en $+\infty$, d'où la conclusion en appliquant deux fois le résultat précédent.

Chapitre 4 : séries numériques

Remarques :

$*$ Noter que le théorème 5, 6 et 7 ne permettent pas de calculer des sommes de séries.

$*$ Indiquer la positivité même lorsqu'elle est évidente (idem lorsque les deux suites sont négatives ou positives à partir d'un certain rang).

$*$ Dans le cas d'une alternance de signe, on peut avoir $u_n \sim v_n$ en $+\infty$ et les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ de nature différente.

Chapitre 4 : séries numériques

- <u>Comparaison série-intégrale</u> :

Les similitudes entre séries numériques et intégrales impropres sont nombreuses.

- <u>Théorème 8 (comparaison série-intégrale)</u> :

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0\ ;\ +\infty[$, **positive et décroissante**.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et la série $\sum_{n\geq 0} f(n)$ sont de la même nature.

Chapitre 4 : séries numériques

Preuve :

Notons S_N la somme partielle d'ordre N de la série $\sum f(n)$ ainsi que $F(x)$ l'intégrale partielle $F(x) = \int_0^x f$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f décroît sur l'intervalle $[n, n+1]$ donc :

$$\forall\, t \in [n, n+1], f(n+1) \leq f(t) \leq f(n).$$

On intègre cet encadrement sur $[n, n+1]$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \boxed{f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n)} \qquad (1)$$

Puis, pour $N \in \mathbb{N}^*$, on somme ces inégalités pour n variant de 0 à $N-1$:

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=0}^{N-1} f(n+1) \leq \sum_{n=0}^{N-1} \int_n^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{n=0}^{N-1} f(n).$$

Chapitre 4 : séries numériques

Avec un changement d'indice dans la première somme, et la relation de Chasles dans la seconde :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*, \boxed{\sum_{n=1}^{N} f(n) \leq \int_0^N f(t)dt \leq \sum_{n=0}^{N-1} f(n)}.$$

Ou encore,

$$\boxed{S_N - f(0) \leq F(N) \leq S_N - f(N)} \qquad (2)$$

- Supposons que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge. Alors la suite $(F(N))_{N\in\mathbb{N}}$ est convergente, donc majorée par un réel noté M. On a donc $\forall\, N \in \mathbb{N}^*, S_N - f(0) \leq F(N) \leq M$ et donc la suite (S_N) est majorée. Comme elle est **croissante** (car la série $\sum f(n)$ est une STP par hypothèse) elle est donc convergente et ainsi la série $\sum f(n)$ converge.

Chapitre 4 : séries numériques

- Supposons que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge. La fonction F n'admet pas de limite finie en $+\infty$ et comme elle est croissante (car f est **positive**), le théorème de la limite monotone montre que $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. On en déduit que $F(N) \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$ et comme $F(N) \leq S_N - f(N) \leq S_N$ c'est que $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$ et donc la série $\sum f(n)$ diverge.

Remarques :

$*$ Les encadrements (1) et (2) sont à savoir retrouver rapidement car ils sont source d'innombrables exercices. Il faut être capable d'adapter ces encadrements dans le cas où f est négative et croissante, ou bien dans le cas où f est définie sur un intervalle $[a\,;\,+\infty[$ au lieu de $[0\,;\,+\infty[$.

Chapitre 4 : séries numériques

$*$ On retrouve souvent (2) sous la forme suivante :

$$f(N)+\int_0^N f(t)dt \leq \sum_{n=0}^{N} f(n) \leq f(0)+\int_0^N f(t)dt\,.$$

Dans le cas de convergence (on a donc $f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$), on peut faire tendre N vers $+\infty$ et on obtient :

$$\int_p^{+\infty} f(t)dt \leq \sum_{n=p}^{+\infty} f(n) \leq f(p)+\int_p^{+\infty} f(t)dt\,,$$

et ainsi comparer les restes de la série et de l'intégrale.

Chapitre 4 : séries numériques

Exemple : Montrons que la série $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\ln n}$ est divergente.

On considère la fonction $f = \left(\begin{array}{c}[2\,;+\infty[\to\mathbb{R}^*{}_+\\ x\to\frac{1}{x\ln x}\end{array}\right)$. Les théorèmes généraux assurent que f est décroissante et de plus, f est positive, donc d'après le théorème précédent, $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\ln n}$ a la même nature que $\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t\ln t}$.

Or, pour $X \geq 2$, on a :

$\int_2^X \frac{dt}{t\ln t} = [\ln(\ln t)]_2^X = \ln(\ln X) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[X\to+\infty]{} +\infty$: donc l'intégrale et la série divergent.

Chapitre 4 : séries numériques

- <u>Proposition 9</u> :

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0\,;\,+\infty[$, **positive** et **décroissante**.

La suite définie par $a_N = \int_0^N f(t)dt - \sum_{n=1}^{N} f(n)$ est convergente.

Preuve :

On reprend les encadrements de la preuve précédente. La suite (a_N) est croissante car :

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, a_{N+1} - a_N = \int_N^{N+1} f(t)dt - f(N+1) \geq 0$ d'après (1).

De plus (a_N) est majorée par $f(0) - f(N) \leq f(0)$ d'après (2), elle est donc convergente.

Chapitre 4 : séries numériques

Séries de Riemann :

- Théorème 10 (critère de Riemann pour les séries numériques) :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\text{La série } \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

Preuve :

Si $\alpha \leq 0$, la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 donc la série diverge grossièrement.

Supposons $\alpha > 0$. La fonction $f = \begin{pmatrix} [1\,;\,+\infty[\, \to {\mathbb{R}^*}_+ \\ x \to \frac{1}{x^\alpha} \end{pmatrix}$ est continue par morceaux, positive et décroissante donc le théorème 7 s'applique : la série est de la même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$. Or cette dernière intégrale converge si et seulement si $\alpha > 1$ d'après le critère de Riemann pour les intégrales.

Chapitre 4 : séries numériques

Remarques :

$*$ Avec $\alpha = 1$, on retrouve le fait que la série harmonique est divergente.

$*$ On ne sait pas calculer, sauf pour quelques valeurs de α, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

$*$ On peut très bien se passer de la comparaison série-intégrale pour montrer, que la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2}$ converge :

$\forall\, n \geq 2, 0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ et donc :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 + 1 - \frac{1}{N} \leq 2.$$

Les sommes partielles de cette STP sont majorées, donc la STP converge.

Chapitre 4 : séries numériques

- Corollaire (règle "$n^\alpha u_n$") :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

i. Si il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors la série $\sum u_n$ converge.

ii. Si il existe un réel $\alpha \in [0\,;1]$ tel que $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors la série $\sum u_n$ diverge.

Preuve :

i. On a alors $u_n = \circ\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ en $+\infty$ et la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge d'après le critère de Riemann ($\alpha > 1$) , donc $\sum u_n$ converge d'après le théorème de domination.

ii. On a alors $\frac{1}{n^\alpha} = \circ\,(u_n)$ en $+\infty$ et la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge d'après le critère de Riemann ($\alpha \leq 1$), donc $\sum u_n$ diverge d'après le théorème de domination.

CHAPITRE 4 : SÉRIES NUMÉRIQUES

Exemple :

Posons $u_n = e^{-\sqrt{n}}$. On a $n^2 u_n = e^{2\ln n - \sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ car $2\ln n - \sqrt{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$ et ainsi $\sum u_n$ converge.

CHAPITRE 4 : SÉRIES NUMÉRIQUES

<u>Comparaison avec des séries géométriques</u> :

- Si (u_n) est une suite géométrique (de réels > 0) de raison r, le théorème 3 nous dit que la nature de $\sum u_n$ dépend de la position de $r = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1. L'idée est simple : comparer, pour une suite de réels strictement positifs (u_n), le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.

- <u>Théorème 11 (règle de d'Alembert)</u> :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ avec $l \in \mathbb{R}_+$ ou $l = +\infty$.

i. Si $l \in [0\,;1[$ alors $\sum u_n$ converge.
ii. Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge grossièrement car $u_n \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$.

Chapitre 4 : séries numériques

Preuve :

i. Puisque $l < 1$, on peut choisir un réel r tel que $l < r < 1$, par exemple le réel $r = \frac{l+1}{2}$. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ et $l < r$ donc il existe un entier n_0 tel que $\forall\, n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq r$. Soit n un entier $> n_0$. On a :

$$u_n \leq r u_{n-1} \leq r^2 u_{n-2} \leq \cdots \leq r^{n-n_0} u_{n_0}$$

et à l'encadrement : $\forall\, n > n_0$, $0 \leq u_n \leq r^{n-n_0} u_{n_0}$ on peut appliquer le théorème de comparaison : la série géométrique $\sum r^{n-n_0} u_{n_0}$ de raison $r \in [0\,;1[$ converge, donc la série $\sum u_n$ converge.

On choisit de même un réel r tel que $1 < r < l$ et on a encore l'existence d'un entier n_0 tel que $\forall\, n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq r$. On obtient $\forall n > n_0, u_n \geq r^{n-n_0} u_{n_0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Chapitre 4 : séries numériques

Remarques :

$*$ Dans le cas où la limite l vaut 1 le théorème précédent ne dit rien. Et pour cause : la série $\sum u_n$ peut être convergente ou divergente. Voici deux exemples :

- Soit $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et la série $\sum u_n$ est divergente.
- Soit $u_n = \frac{1}{n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = (1 - \frac{1}{n+1})^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et la série $\sum u_n$ est convergente.

$*$ Pas de réciproque à la règle de d'Alembert. Le théorème **ne dit pas** que si $\sum u_n$ converge (resp. diverge) alors $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers une limite $l > 1$, comme le montrent les deux exemples précédents.

$*$ La plupart du temps, la suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend **presque toujours** vers 1. Il existe des règles qui permettent de conclure dans ce cas lorsqu'on connaît un équivalent de $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$ (cf. règle de Raabe).

$*$ La règle de d'Alembert $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est bien adaptée à des séries dont le terme général $u_n$comporte des exponentielles ou des factorielles.

Chapitre 4 : séries numériques

Exemple : Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 0}\frac{n!}{n^n}$.

Pour tout entier n on pose $u_n = \frac{n!}{n^n} > 0$ (par convention $u_0 = 1$). On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)\times n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n}$$
$$= \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e}$$

et puisque $0 \leq \frac{1}{e} < 1$, la série est convergente d'après la règle de d'Alembert.

On a utilisé le résultat suivant (à connaître) avec $x = 1$:

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x}. \qquad (4)$$

CHAPITRE 4 : SÉRIES NUMÉRIQUES

Preuve :

La quantité $1+\frac{x}{n}$ est strictement positive à partir d'un certain rang (dès que $n > -x$). On peut écrire, si n est pris assez grand, $\ln\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right] = n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \sim n \times \frac{x}{n} = x$en $+\infty$ et donc $\ln\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. Enfin, on compose par la fonction exponentielle qui est continue au point x.

CHAPITRE 4 : SÉRIES NUMÉRIQUES

Une autre idée pour comparer la suite de réels strictement positifs (u_n) à une suite géométrique est de constater que si (a_n) est géométrique de raison r, alors $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n = a_0 r^n$ et donc $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a_0}\, r \xrightarrow[n\to+\infty]{} r$. Il est donc naturel de chercher une limite à la suite $\sqrt[n]{u_n}$, et si cette limite existe, de la comparer avec 1. C'est l'idée de Cauchy.

- <u>Théorème 12 (règle de Cauchy)</u> :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\sqrt[n]{u_n}$ avec $l \in \mathbb{R}_+$ ou $l = +\infty$.

i. Si $l \in [0\,;1[$ alors $\sum u_n$ converge.

ii. Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge grossièrement car $u_n \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$.

Chapitre 4 : séries numériques

Preuve :

i. Puisque $l < 1$, on peut choisir un réel noté r strictement compris entre l et 1, par exemple le réel $r = (l+1)/2$. On a $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ donc il existe un entier n_0 tel que : $\forall\, n \geq n_0, \sqrt[n]{u_n} \leq r$ et donc $\forall\, n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq r^0$. On peut appliquer le théorème de comparaison : $\sum r^n$ converge donc $\sum u_n$ converge.

ii. On choisit de même un réel r tel que $1 < r < l$ et on a encore l'existence d'un entier n_0 tel que $\forall\, n \geq n_0, \sqrt[n]{u_n} \geq r$ et donc $\forall\, n \geq n_0, u_n \geq r^n$. La série $\sum u_n$ diverge grossièrement car $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Chapitre 4 : séries numériques

Remarques :

∗ Dans le cas où la limite l vaut 1, le théorème précédent ne permet pas de conclure. La série $\sum u_n$ peut être convergente ou divergente.

∗ Le fait que $\sum u_n$ converge (ou diverge) n'entraîne pas que la suite $\sqrt[n]{u_n}$ possède une limite finie.

∗ La suite $\sqrt[n]{u_n}$ tend presque toujours vers 1. On pensera au critère de Cauchy lorsque le terme général u_n se présente sous la forme $u_n = (v_n)^n$ avec une suite (v_n) simple à étudier.

∗ La règle de Cauchy est hors programme pour les PT. Pour chaque exercice où elle s'applique, il faudra imiter sa preuve ou bien étudier le quotient $\frac{u_n}{l^n}$ et le plus souvent chercher un équivalent à son logarithme.

Chapitre 4 : séries numériques

- <u>Théorème 13 (d'Alembert entraîne Cauchy)</u> :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

$$\text{Si } \frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \text{ alors } \sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

Preuve :

$l \in [0\,;\,+\infty[$ de sorte que la suite $v_n = \ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ tend vers $\ln l \in]-\infty\,;\,+\infty[$. On peut appliquer à la suite (v_n) le **théorème de Cesàro** : la suite (w_n) de ses moyennes arithmétiques converge aussi vers $\ln l$.

Or, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, w_n = \frac{1}{n}(v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1})$

$w_n = \frac{1}{n}(\ln u_n - \ln u_{n-1} + \ln u_{n-1} - \cdots - \ln u_1 + \ln u_1 - \ln u_0)$

$w_n = \frac{1}{n}(\ln u_n - \ln u_0)$ (télescopage).

On en déduit que $\frac{1}{n}\ln u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln l$ et en composant par la fonction continue exponentielle, on obtient que $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$

Chapitre 4 : séries numériques

Remarque :

La réciproque de ce théorème est fausse, comme le montre le contre-exemple suivant : on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_n = 1$ si n est impair et par $u_n = 2$ si n est pair. On constate facilement que $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ tandis que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ n'admet pas de limite

Exemple : Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} > 0$. On constate que $\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e}$ d'après (4). On imite alors la preuve de la règle de Cauchy : $\frac{1}{e} < \frac{1}{2}$ donc $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq n_0, \sqrt[n]{u_n} \leq \frac{1}{2}$. On a alors $\forall\, n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et on peut appliquer le théorème de comparaison : $\sum u_n$ est convergente.

CHAPITRE 4 : SÉRIES NUMÉRIQUES

Séries à termes quelconques :

- Séries absolument convergentes :

On considère désormais des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Définition (séries absolument convergentes) :

La série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** (AC) si et seulement si la STP $\sum|u_n|$ est convergente.

Ce qui suit, est le théorème fondamental concernant les séries absolument convergentes (AC).

Chapitre 4 : séries numériques

- <u>Théorème 14</u> :

Toute série absolument convergente est convergente.

Preuve :

- Montrons d'abord le résultat lorsque (u_n) est réelle. On a $\forall\, n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n + |u_n| \leq 2|u_n|$ avec $\sum |u_n|$ convergente par hypothèse, donc d'après le théorème de comparaison, $\sum (u_n + |u_n|)$ est convergente, ce qui montre que $\sum u_n$ est convergente d'après le théorème 2.
- Si (u_n) est complexe, on écrit alors $u_n = \Re e(u_n) + i\, \Im m(u_n)$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |\Re e(u_n)| \leq |u_n|$ et $0 \leq |\Im m(u_n)| \leq |u_n|$ ce qui montre (théorème de comparaison) que les deux séries $\sum \Re e(u_n)$ et $\sum \Im m(u_n)$ sont deux séries réelles absolument convergentes, donc convergentes. Ainsi $\sum u_n$ est convergente d'après le théorème 2.

Chapitre 4 : séries numériques

Remarques :

$*$ La réciproque de ce théorème est fausse : il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes (AC). De telles séries sont dites **semi-convergentes**. C'est le cas par exemple de la série de Riemann alternée : $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$. En effet, on a vu précédemment que cette série est convergente (de somme $-\ln 2$) mais la série $\sum_{n\geq 1} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|$ est la série harmonique, qui elle, diverge.

$*$ Ce théorème nous permet dans beaucoup de cas de ramener l'étude d'une série à termes quelconques à l'étude d'une STP, pour laquelle on possède déjà de nombreux outils. Les théorèmes qui précèdent possèdent tous une version pour les séries à termes quelconques, où l'on remplace l'hypothèse portant sur u_n par une hypothèse portant sur $|u_n|$ et où la conclusion porte également sur $|u_n|$. Néanmoins, on sera attentif au fait que $\sum|u_n|$ diverge n'entraîne pas en général que $\sum u_n$ diverge (sauf bien sûr si la divergence est grossière).

CHAPITRE 4 : SÉRIES NUMÉRIQUES

Exemple : Montrons que tout nombre complexe z, la série $\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}$ est convergente.

- Posons pour cela $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{z^n}{n!}$ et $v_n = |u_n| = \frac{|z|^n}{n!}$. Si $z = 0$, les séries sont manifestement convergentes.
- Pour $z \neq 0$, on a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \in [0\,;1[$ et le critère de d'Alembert s'applique : $\sum v_n$ converge donc la série $\sum u_n$ est AC donc convergente. La somme de cette série se note $\exp(z)$ ou e^z (exponentielle du nombre complexe z). On a donc :

$$\boxed{\forall\, z \in \mathbb{C},\ exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}}.$$

Par exemple, si $z = a + ib$ avec et réels, on a la formule :

$$e^z = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$$

Chapitre 4 : séries numériques

- <u>Séries alternées</u> :

La série de réels $\sum u_n$ est dite alternée si la suite $(-1)^n u_n$ est de signe constant, ce qui revient à dire qu'on a $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n v_n$ où la suite (v_n) garde un signe constant.

Autrement dit, la série $\sum u_n$ est alternée lorsque :

- Pour tout entier n, u_n est du signe de $(-1)^n$;
- Pour tout entier n, u_n est du signe de $(-1)^{n+1}$.

CHAPITRE 4 : SÉRIES NUMÉRIQUES

- <u>Théorème n°15 (critère spécial des séries alternées)</u> :

On suppose que pour tout entier n, $u_n = (-1)^n v_n$ où la suite (v_n) **décroît vers** 0. Alors :

i. La série $\sum u_n$ est convergente.

De plus, si on note $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ la somme partielle d'ordre N et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la somme de la série, on a :

ii. S est comprise entre deux termes consécutifs de la suite (S_N) : $\forall\, N \in \mathbb{N}, S_{2N+1} \leq S \leq S_{2N}$.

iii. Le reste d'ordre N, $R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$ est du signe de son premier terme u_{N+1} et dominé par celui-ci :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, |R_N| \leq |u_{N+1}|.$$

Chapitre 4 : séries numériques

Preuve :

i. On va montrer, que les suites extraites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes**.

- La suite (S_{2n}) décroît : $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = v_{2n+2} - v_{2n+1} \leq 0$ car la suite (v_n) décroît.
- La suite (S_{2n+1}) croît : $S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = -v_{2n+3} + v_{2n+2} \geq 0$ car la suite (v_n) décroît.
- La différence $S_{2n} - S_{2n+1}$ tend vers 0 : $S_{2n} - S_{2n+1} = -u_{2n+1} = v_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par hypothèse.

Ainsi les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune, ce qui entraîne que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers cette même limite, et donc la série $\sum u_n$ est convergente et sa somme S est cette limite commune.

ii. La suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ croît vers sa limite S, donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} \leq S$ et de même pour l'autre inégalité.

Chapitre 4 : séries numériques

iii. Pour l'encadrement du reste, on écrit simplement :

- $u_{2n+2} = S_{2n+2} - S_{2n+1} \geq S - S_{2n+1} \geq 0$ et R_{2n+1} et u_{2n+2} sont tous deux positifs.
- $u_{2n+1} = S_{2n+1} - S_{2n} \leq S - S_{2n} \leq 0$ et donc R_{2n} et u_{2n+1} sont tous deux négatifs.

Enfin les inégalités précédentes montrent que $|R_n| \leq |u_{n+1}|$ quelque soit la parité de n.

CHAPITRE 4 : SÉRIES NUMÉRIQUES

Remarques :

$*$ Dans le cas où la suite (u_n) a le signe de $(-1)^{n+1}$, c'est-à-dire si elle s'écrit $u_n = (-1)^n v_n$ avec (v_n) croissante vers 0, on applique le théorème précédent à la suite $(-u_n)$. Les conclusions (i) et (ii) restent inchangées tandis que (ii) devient : $\forall\, N \in \mathbb{N},\ S_{2N} \leq S \leq S_{2N+1}$.

$*$ Les deux hypothèses sur sont bien sûr indispensables.

$*$ L'encadrement de la somme et la majoration du reste sont à retenir car ils interviennent dans de nombreux exercices.

Chapitre 4 : séries numériques

Exemple : Etudier la convergence des **séries de Riemann alternées** : $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} = (-1)^n v_n$.

- Si $\alpha \leq 0$, la suite (u_n) ne tend pas vers 0 donc la divergence est grossière.
- Si $\alpha > 0$, la suite (v_n) est bien décroissante vers 0, et le critère spécial s'applique. On peut donc énoncer :

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 0}.$$

On remarquera aussi, d'après le critère de Riemann, que cette série est AC lorsque $\alpha > 1$ et semi-convergente lorsque $0 < \alpha \leq 1$.

CHAPITRE 4 : SÉRIES NUMÉRIQUES

Calcluls approchés de sommes de séries :

On considère une série $\sum u_n$ convergente et on cherche à donner une valeur approchée de sa somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. La suite des sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ converge vers S et la différence est $S - S_N = R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$, ainsi :

$$\boxed{S_N \text{ est une valeur approchée de } S \text{ à } R_N \text{ près}}.$$

On cherche donc, dans ce qui suit, à majorer le reste $|R_N| = |S - S_N|$ pour estimer l'erreur commise en arrêtant le calcul de la somme à l'ordre N.

Chapitre 4 : séries numériques

- Séries alternées :

Dans le cas où la série $\sum u_n$ relève du critère spécial des séries alternées, on a directement une estimation du reste : $|R_N| \leq u_{N+1}$ et de plus, R_N est du signe de u_{N+1}.

- Cas de l'absolue convergence :

Dans le cas où la série $\sum u_n$ est absolument convergente, on a :

$$|R_N| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n|.$$

En effet, si p désigne un entier supérieur à $N+1$, on a $\left|\sum_{n=N+1}^{p} u_n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{p} |u_n|$ d'après l'inégalité triangulaire, puis on peut faire tendre p vers $+\infty$.

On est donc ramené à estimer le reste $R'_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n|$ qui est celui d'une STP.

Chapitre 4 : séries numériques

- <u>Séries comparables à des séries géométriques</u> :

Supposons qu'on ait une majoration du terme général u_n de la forme $|u_n| \leq ar^n$ où $a > 0$ et $0 < r < 1$. On peut alors majorer le reste comme suit :

$$|R_N| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} ar^n = ar^{N+1} \sum_{n=0}^{+\infty} r^n$$
$$= a\frac{r^{N+1}}{1-r}.$$

Chapitre 4 : séries numériques

Exemple : Donner une valeur approchée de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos n}{2^n+1}$ à 10^{-3} près.

On note $u_n = \frac{\cos n}{2^n+1}$ et on a la majoration $|u_n| \leq \frac{1}{2^n}$ donc la série est bien convergente, et $|R_N| \leq \frac{(1/2)^{N+1}}{1-1/2} = \frac{1}{2^N}$.

On cherche donc un entier N tel que $\frac{1}{2^N} \leq 10^{-3}$ et l'entier $N = 10$ convient. Une valeur approchée de la même somme est donc $S_{10} = \sum_{n=0}^{10} \frac{\cos n}{2^n+1} \approx 0{,}474474$.

Chapitre 4 : séries numériques

- <u>Comparaison série-intégrale</u> :

On se place maintenant dans le cas d'une série $\sum_{n\geq a} f(n)$, la fonction f étant CPM, décroissante et positive sur $[a\,;\,+\infty[$. On obtient la majoration :

$$0 \leq R_N \leq \int_N^{+\infty} f(t)dt\,.$$

- <u>Séries comparables à des séries de Riemann</u> :

Supposons qu'on ait une majoration du terme général u_n de la forme $|u_n| \leq \frac{a}{n^\alpha}$ où $a > 0$ et $\alpha > 1$. La série est alors AC, et on la majoration du reste :

$$|R_N| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n| \leq a \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

CHAPITRE 4 : SÉRIES NUMÉRIQUES

La dernière somme écrite se majore à l'aide d'une comparaison série-intégrale : $f : t \to \frac{1}{t^\alpha}$ est CPM, positive et décroissante sur $[1\,;+\infty[$, donc on peut écrire :

$$0 \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_N^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{N^{\alpha-1}}.$$

Ainsi,

$$|R_N| \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{1}{N^{\alpha-1}}.$$

Chapitre 4 : séries numériques

Exemple : Donner une valeur approchée de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1}$ à 10^{-2} près.

On a ici la majoration $0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{2}\frac{1}{n^2}$ d'où on déduit que $0 \leq R_N \leq \frac{\pi}{2N}$. On choisit donc un entier N tel que $\frac{\pi}{2N} \leq 10^{-2}$.

L'entier $N = 158$ convient et la valeur approchée (par défaut) cherchée est $S_{158} \approx 1{,}12569$.

FIN