MODULE :
RÉUSSIR SA DEUXIÈME ANNÉE

Mathématiques en Classes préparatoires

Filière PT

Sommaire général

Chapitre 6 : déterminants

Chapitre 6 : déterminants

<u>Formes n-linéaires alternées</u> :

- <u>Définition</u> :

On dit que $f = \begin{pmatrix} E^n \to \mathbb{K} \\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \to f(x_1, \cdots, x_n) \end{pmatrix}$ est une forme ***n*-linéaire** si on a :

$$\forall\, (x_1, \cdots, x_n) \in E_{n-1}, \qquad x_i \to f(x_1, \cdots, x_n) \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(E, \mathbb{K}).$$

Une forme n-linéaire f est dite **alternée** si on a de plus :

$$\forall\, i \neq j \in \{1, \cdots, n\}, \forall\, (x_1, \cdots, x_n) \in E^n,$$
$$f\left(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n\right) = -f(x_1, \cdots, x_i, \cdots x_j, \cdots, x_n).$$

Ainsi une forme n-linéaire est une application de E^n dans $\mathbb{K}$ qui est linéaire par rapport à chacune de ses variables :

$$f(x_1, \cdots, \lambda x_i + \mu x'_i, \cdots, x_n)$$
$$= \lambda f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) + \mu f(x_1, \cdots, x'_i, \cdots, x_n).$$

Chapitre 6 : déterminants

Exemple :

$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f\big((a_1, a_2), (b_1, b_2)\big) = a_1 b_2 - a_2 b_1$est une forme bilinéaire alternée sur $E = \mathbb{R}^2$.

Remarque :

Si f est n-linéaire alternée et deux des vecteurs x_i et x_j sont égaux, alors $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$.

- <u>Théorème 1</u> :

i. L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$-ev. On le note $\boldsymbol{\mathcal{A}}_n(E, \mathbb{K})$.

ii. Si E est de dimension n, alors $\boldsymbol{\mathcal{A}}_n(E, \mathbb{K})$ est de dimension 1.

Chapitre 6 : déterminants

Preuve :

i. $\boldsymbol{\mathcal{A}}_n(E, \mathbb{K})$ est un sev de $\boldsymbol{\mathcal{F}}(E^n, \mathbb{K})$ ensemble des fonctions de E^n dans $\mathbb{K}$. En effet, il est non vide car la fonction nulle de E^n dans $\mathbb{K}$ est bien n-linéaire et alternée. De plus, la somme de deux fonctions n-linéaires alternées l'est encore, de même que le produit d'une forme n-linéaire alternée par un scalaire.

Ainsi, si E est de dimension n, il existe une forme n-linéaire alternée différente de 0 et toute autre forme n-linéaire alternée lui est proportionnelle.

Chapitre 6 : déterminants

Déterminant de n vecteurs dans une base :

Soit $\beta = (e_1, \cdots, e_n)$ base de E.

- Définition :

L'application det dans la base β, (det_β), est l'unique application n-linéaire alternée f de E qui vérifie $f(e_1, \cdots, e_n) = 1$ $\left(det_\beta(\beta) = 1\right)$.

- Théorème 2 :

Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$. Notons $d = det_\beta(x_1, \cdots, x_n)$.

i. Permuter deux des vecteurs $x_1, \cdots, x_n$ multiplie d par -1.

ii. Si deux des vecteurs sont identiques, alors $d = 0$.

iii. Si un des vecteurs s'exprime comme une combinaison linéaire des autres, alors $d = 0$.

iv. Ajouter à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres laisse d invariant.

v. Multiplier un seul des vecteurs par le scalaire λ multiplie d par λ.

Chapitre 6 : déterminants

Preuve :

iii. Supposons que x_1 s'exprime comme combinaison linéaire de la famille $(x_2, \cdots, x_n) \Rightarrow x_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i$ où $\lambda_i \in \mathbb{K}$. On a alors :

$$det_\beta(x_1, \cdots, x_n) = det_\beta\left(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i, \cdots, x_n\right)$$

$$= \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \, det_\beta(x_i, x_2, \cdots, x_n) = 0.$$

On a utilisé la linéarité par rapport à la 1ère place et le fait que dans la dernière somme écrite tous les termes sont nuls car le vecteur x_i apparaît deux fois.

On en déduit que si un des vecteurs x_i est nul, alors le déterminant de cette famille de vecteurs est nul.

Chapitre 6 : déterminants

Changement de base :

- Théorème 3 :

Soient β et β' deux bases de E. On a alors :

$$\forall\,(x_1,\cdots,x_n)\in E^n,$$

$$\boxed{det_{\beta'}(x_1,\cdots,x_n)=det_{\beta'}(\beta)\times det_\beta\,(x_1,\cdots,x_n).}$$

Preuve :

Notons $\beta=(e_1,\cdots,e_n)$ et $\beta'=(e_1{}',\cdots,e_n{}')$. Les deux éléments non nuls de $\boldsymbol{\mathcal{A}}_n(E,\mathbb{K})$ que sont det_β et $det_{\beta'}$ sont proportionnels car $\boldsymbol{\mathcal{A}}_n(E,\mathbb{K})$ est de dimension 1. Ainsi, $\exists\,\lambda\in\mathbb{K}, det_{\beta'}=\lambda det_\beta$, c'est-à-dire $\forall(x_1,\cdots,x_n)\in E^n, det_{\beta'}\,(x_1,\cdots,x_n)=\lambda\,det_\beta\,(x_1,\cdots,x_n)$.

En appliquant la formule avec $x_1=e_1,\cdots,x_n=e_n$, on obtient $det_{\beta'}(\beta)=\lambda\,det_\beta(\beta)=\lambda$, d'où le résultat. Si on applique la formule avec $x_1=e_1{}',\cdots,x_n=e_n{}'$, on obtient $det_{\beta'}(\beta')=1=det_{\beta'}(\beta)\times det_\beta(\beta')\Rightarrow det_{\beta'}(\beta)=\frac{1}{det_\beta(\beta')}$.

CHAPITRE 6 : DÉTERMINANTS

- Théorème 4 :

Soit β une base de E et $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$. La famille est une base de E si et seulement si $det_\beta\,(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$.

CHAPITRE 6 : DÉTERMINANTS

Aires :

Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $\beta = (e_1, e_2)$ base de E. Pour u et v dans E le réel positif $\left|det_\beta(u, v)\right|$ est l'aire du parallélogramme défini par les vecteurs u et v, l'unité d'aire étant définie par e_1 et e_2.

Remarque :

Famille (u, v) liée $\Leftrightarrow$ parallélogramme défini par u et v aplati $\Leftrightarrow$ aire nulle $\Leftrightarrow$ $det_\beta(u, v) = 0$.

Chapitre 6 : déterminants

Volumes :

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ base de E. Le réel positif $\left|det_\beta(u, v, w)\right|$ est le volume du parallélogramme engendré par u, v, w.

Chapitre 6 : déterminants

<u>Déterminant d'un endomorphisme</u> :

$\mathcal{L}(E)$: ensemble des endomorphismes de E.

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et β base de E, $det_\beta(u) = det_\beta\big(u(e_1), \cdots, u(e_n)\big)$.

- <u>Théorème 5</u> :

i. Le scalaire $det_\beta(u)$ est indépendant de β. On le note $det\,(u)$ et on l'appelle déterminant de l'endomorphisme u.

ii. $\forall$ n-uplet $(x_1, \cdots, x_n)$ de E, on a :

$det_\beta\big(u(x_1), \cdots, u(x_n)\big) = \det(u) \times det_\beta(x_1, \cdots, x_n)$.

Exemple :

L'homothétie de E de rapport α est l'application $h : x \to \alpha x$.
Soit $\beta = (e_1, \cdots, e_n)$ une base quelconque de E, on a :

$$det\,(h) = det_\beta(\alpha e_1, \cdots, \alpha e_n) = \alpha^n det_\beta(\beta) = \alpha^n.$$

Chapitre 6 : déterminants

- <u>Théorème 6</u> :

Soient u et v deux endomorphismes de E.

i. $\det(u \circ v) = \det(u) \times \det(v)$

ii. u est un endomorphisme de E si et seulement si $\det(u) \neq 0$. Si c'est le cas, $\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)}$.

Preuve :

i. On choisit une base $\beta = (e_1, \cdots, e_n)$ de E. On note $x_i = v(e_i)$ et on applique deux fois le théorème 5 :

$$\begin{aligned}
\det(\mathrm{u} \circ \mathrm{v}) &= det_\beta((u \circ v)(e_1), \cdots, (u \circ v)(e_n)) \\
&= det_\beta(u(x_1), \cdots, u(x_n)) \\
&= det(u) \times det_\beta(x_1, \cdots, x_n) \\
&= \det(u) \times det_\beta(v(e_1), \cdots, v(e_n)) \\
&= det(u) \times det(v) \times det_\beta(\beta) \\
&= \det(u) \times \det(v).
\end{aligned}$$

ii. Supposons que u automorphisme de E (endomorphisme bijectif). On a alors $u \circ u^{-1} = Id_E$ donc d'après *(i)* :

$1 = \det(Id_E) = \det(u \circ u^{-1}) = \det(u) \times \det(u^{-1})$, ce qui prouve que ces deux scalaires sont non nuls et inverses l'un de l'autre.

Chapitre 6 : déterminants

<u>Déterminant d'une matrice carrée</u> :

- <u>Définition</u> :

Le déterminant d'une matrice est le déterminant des ses vecteurs colonnes, calculé dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

$$\det(A) = det_{\beta_0}(V_1, \cdots, V_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

où β_0 désigne la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$: $\beta_0 = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots$

CHAPITRE 6 : DÉTERMINANTS

Remarques :

- Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit de ses termes diagonaux.

Exemple : la matrice unité I_n ou 1_n définie par : $\forall\, i,\ \alpha_i = 1 \Rightarrow \det(I_n) = 1$.

- $$det_\beta(x_1, \cdots, x_n) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & \cdots & x_n \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}, x_1 \quad \cdots \quad x_n$$

et $\forall\, j \in \{1, \cdots, n\}, x_j = a_{1j}e_1 + \cdots + a_{nj}e_n$.

Chapitre 6 : déterminants

<u>Lien avec les endomorphismes</u> :

u : endomorphisme de E et $\beta = (e_1, \cdots, e_n)$ base de E.

Matrice de u dans β est :

$$[u]_\beta = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(e_1) & \cdots & u(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \end{pmatrix} \end{array}.$$

Par définition du déterminant d'un endomorphisme, on a :

$$\det(u) = det_\beta\big(u(e_1), \cdots, u(e_n)\big) = \det\big([u]_\beta\big).$$

Chapitre 6 : déterminants

- <u>Proposition 7</u> :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour toute base β de E, on a :

$$\det(\mathrm{u}) = \det\left([u]_\beta\right).$$

Chapitre 6 : déterminants

<u>Propriétés du déterminant</u> :

- <u>Théorème 8</u> :

Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$:

i. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$

ii. $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$

iii. A est inversible $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$. Si c'est le cas, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

iv. $\det({}^tA) = \det(A)$.

Preuve :

i. n-linéarité par rapport aux vecteurs colonnes de la matrice.

ii. Si u et v sont deux endomorphismes d'un ev E de dimension n et β une base de E, alors on a :

$$[u \circ v]_\beta = [u]_\beta \times [v]_\beta.$$

Chapitre 6 : déterminants

Soient alors u et v les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés à A et B respectivement, et la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on a :

$$\begin{aligned}\det(A\times B) = \det\left([u]_{\beta_0}\times[v]_{\beta_0}\right) &= \det([u\circ v]_{\beta_0}) \\ = \det(u\circ v) &= \det(u)\times\det(v) \\ &= \det([u]_{\beta_0})\times\det([v]_{\beta_0}) \\ &= \det(A)\times\det(B)\,.\end{aligned}$$

iii. Si A est inversible alors $1=\det(A\times A^{-1})=\det(A)\times\det(A^{-1})$ donc $\det(A)\neq 0$ et $\det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}$. Réciproquement, si $\det(A)\neq 0$, alors $\det(u_A)\neq 0$ donc u_A est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$ et si on note $B=[{u_A}^{-1}]_{\beta_0}$, on a $AB=[u_A]_{\beta_0}\times[{u_A}^{-1}]_{\beta_0}$ et donc A est inversible d'inverse $A^{-1}=[{u_A}^{-1}]_{\beta_0}$.

iv. Admis.

Les colonnes de étant les lignes de A, la propriété permet de traduire toute propriété du déterminant portant sur les colonnes de A en une propriété portant sur ses lignes.

Chapitre 6 : déterminants

<u>Calcul du déterminant</u> :

$n = 2$ et $n = 3$:

- <u>Théorème 9</u> :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \ ;$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + (-1)^{1+2}a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1).$$

Preuve :

Il suffit de constater que $\varphi : (\mathbb{K}^2) \to \mathbb{K}^2$ définie par $\varphi\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right) = ad - bc$ est bilinéaire alternée et prend la valeur 1 sur la base canonique de $\mathbb{K}^2$: $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1$. Dans $\mathbb{R}^3$, on reconnaît la formule $det_{bc}(u, v, w) = \langle u\hat{}v \, , w \rangle$ (produit scalaire).

Chapitre 6 : déterminants

<u>Calculs par blocs</u> :
Soient p et r deux entiers naturels non nuls et $A \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_p(\mathbb{K})$, $D \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_p(\mathbb{K}) \Rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{p+r}(\mathbb{K})$.

- <u>Théorème 10</u> :

Avec ces notations, $det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A) \times \det(D)$.

Remarques :

- En transposant, on voit aussi que $det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \times \det(D)$.
- On généralise aux **matrices triangulaires** supérieures **par blocs** par récurrence sur n : si $A_1 \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{p,1}(\mathbb{K}), \cdots, A_n \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{p,n}(\mathbb{K})$ alors :

$$det \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \boxed{A_n} \end{pmatrix} = \det(A) \times \cdots \times \det(A_n).$$

Noter que la matrice écrite élément de $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{p_1+\cdots+p_n}(\mathbb{K})$ n'est pas a priori triangulaire supérieure. Idem pour les matrices triangulaires inférieures par blocs en transposant. **Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses termes diagonaux.**

Chapitre 6 : déterminants

<u>Développement par rapport aux lignes et colonnes</u> :

Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_n(\mathbb{R})$; $C_1, \cdots, C_n$ colonnes de A et $\beta_0 = (e_1, \cdots, e_n)$ base canonique de $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Pour $j \in \{1, \cdots, n\}, C_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$,

$$\det(A) = det_{\beta_0}\left(C_1, \cdots, C_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i, C_{j+1}, \cdots, C_n\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} det_{\beta_0}\left(C_1, \cdots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \cdots, C_n\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{\mathcal{A}}_{ij}.$$

- <u>Définition</u> :

On appelle cofacteur de place (i, j) de A le scalaire $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{ij} = det_{\beta_0}(C_1, \cdots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \cdots, C_n)$, qui est le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la j-ième colonne par la colonne élémentaire e_i.

Chapitre 6 : déterminants

- Définition :

On appelle **mineur de place** $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ **de** $\boldsymbol{A}$ le scalaire Δ_{ij} qui est le **déterminant de la matrice appartenant à** $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{n-1}(\mathbb{K})$ **obtenue à partir de** $\boldsymbol{A}$ **en supprimant la** $\boldsymbol{i}$**-ème ligne et la** $\boldsymbol{j}$**-ème colonne**.

Exprimons $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{ij}$ en fonction de Δ_{ij} :

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

On va amener le seul 1 de la matrice en place (i, j) à la place (1, 1). Pour cela, on permute la colonne j et la colonne $j-1$, puis la colonne $j-1$ avec $j-2$ et ainsi de suite jusqu'à la colonne 1.

Chaque permutation de colonne multiplie le déterminant par -1 et donc il se trouve multiplié par $(-1)^{j-1}$ après les j-1 permutations de colonne. De plus, le déterminant se trouve multiplié par $(-1)^{i-1}$ après les $i-1$ permutations de ligne. Au final, $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{ij}$ est multiplié par $(-1)^{i+j-2} = (-1)^{i+j}$ et on a placé le 1 en place (1, 1).

CHAPITRE 6 : DÉTERMINANTS

$\Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}_{ij} = (-1)^{i+j}$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i\,,n} \\ 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & & & \cdots & \\ a_{i-1,1} & \cdots & & & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$= (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, avec un développement par rapport à la 1ère ligne.

Chapitre 6 : déterminants

- <u>Théorème 11 (formule de Laplace)</u> :

i. $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

ii. $\forall\, j \in \{1, \cdots, n\}$, on a $\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\Delta_{ij}$ (**développement par rapport à la *j*-ième colonne**).

iii. $\forall\, i \in \{1, \cdots, n\}$, on a : $\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\Delta_{ij}$ (**développement par rapport à la *j*-ième colonne**).

Exemple :

On calcule $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$. On développe par rapport à la $2^{\text{ème}}$ colonne (par exemple) qui possède deux termes nuls.

$\det(A) = (-1)^{1+2}a_{12}\Delta_{12} + (-1)^{3+2}a_{32}\Delta_{32} = -\Delta_{12} + \Delta_{32}$.

$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + (-1)^5 \times 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 0 = -3 \times (2-2) = 0.$

Et $\Delta_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4 \times 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$. D'où $\det(A) = 0$ comme on aurait pu le voir puisque la $2^{\text{ème}}$ et $4^{\text{ème}}$ ligne de A sont proportionnels.

CHAPITRE 6 : DÉTERMINANTS

Opérations élémentaires sur les lignes et colonnes :

- Théorème 12 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons d le scalaire $d = \det(A)$.

i. Permuter deux lignes ou deux colonnes de A multiplie d par -1.

ii. Ajouter à l'une des lignes ou l'une des colonnes une combinaison linéaire des autres laisse d invariant.

iii. Multiplier une ligne ou une colonne par le scalaire λ multiplie d par λ.

Remarques :

- Effectuer une opération élémentaire sur une colonne (OEC) ou une opération élémentaire sur une ligne (OEL) sur une matrice A, revient à multiplier A à droite (respectivement à gauche) par une matrice d'opération élémentaire. Cette dernière matrice est obtenue en appliquant à la matrice I_n l'opération à effectuer sur A.

Chapitre 6 : déterminants

Exemple :

Permuter la 2ème et la 3ème ligne d'une matrice A de taille 3, revient à la multiplier à gauche par $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a bien :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

On vérifie ainsi que $\det(DA) = \det(D) \times \det(A) = -\det(A)$. De même, effectuer l'opération $C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1 + 4C_3$ revient à multiplier A à droite par la matrice élémentaire $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ qui est bien de déterminant 1.

Chapitre 6 : déterminants

- Dans la pratique, on effectuera des OELC pour faire apparaître des 0 dans la matrice… C'est la méthode la plus rapide pour calculer un déterminant.
- Par une **succession d'OEL**, on peut **mettre le déterminant sous forme triangulaire supérieure**. C'est la méthode du **pivot de GAUSS** qui est également utilisée pour résoudre un système linéaire ou encore pour inverser une matrice

Exemple :

Calculer $d = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 7 & 2 \\ -2 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$. On profite de la présence du 1 en place (1, 1) (s'il n'y est pas, le faire apparaître) pour annuler tous les autres coefficients de la 1ère colonne. On effectue successivement les opérations élémentaires : $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$; $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$; $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$ qui laissent d invariant.

Chapitre 6 : déterminants

On obtient :

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{array}{c} \\ L_2{}' \\ L_3{}' \\ L_4{}' \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & -4 & -1 \end{vmatrix}.$$

On effectue $L_3' \leftarrow L_3' - L'_2$ puis $L_4' \leftarrow L_4' - 4L'_2$, ce qui donne :

$$d = 3 \times \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -8 & 7 \end{vmatrix} \text{ avec } L_4'' \leftarrow L_4'' + 4L_3'',$$

$$d = 3 \times \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 43 \end{vmatrix} = 3 \times 2 \times 43 = 258.$$

CHAPITRE 6 : DÉTERMINANTS

<u>Exercice</u> : Déterminant de Vandermonde :

Pour $n \geq 2$ et $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$:

$$V_n(a_1, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & {a_1}^2 & \cdots & {a_1}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & {a_n}^2 & \cdots & {a_n}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

<u>1ère méthode</u> : par OEC simples :

On effectue successivement, sur les colonnes $C_1, \cdots, C_n$ de la matrice, les opérations suivantes qui laissent le déterminant invariant : $C_n \leftarrow C_n - a_n C_{n-1}$ puis $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - a_n C_{n-2}$ et ainsi de suite jusqu'à $C_2 \leftarrow C_2 - a_n C_1$. A chaque étape, les colonnes intervenant sont bien celles de la matrice de départ. On obtient :

$$V_n(a_1, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 - a_n & a_1(a_1 - a_n) & \cdots & {a_1}^{n-1}(a_{n-1} - a_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & a_{n-1} - a_n & a_{n-1}(a_{n-1} - a_n) & \vdots & a_{n-1}(a_{n-1} - a_n) \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

Chapitre 6 : déterminants

En développant par rapport à la dernière ligne, on peut écrire :

$$V_n(a_1,\cdots,a_n) = (-1)^{n+1} \times 1$$

$$\times \begin{vmatrix} a_1 - a_n & a_1(a_1 - a_n) & \cdots & {a_1}^{n-2}(a_1 - a_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} - a_n & a_{n-1}(a_{n-1} - a_n) & \cdots & {a_{n-1}}^{n-2}(a_{n-1} - a_n) \end{vmatrix}.$$

De plus, par linéarité, on a :

$$\Rightarrow \quad V_n(a_1,\cdots,a_n) = (-1)^{n+1} \times (a_1 - a_n)\cdots(a_{n-1} - a_n) \times$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & {a_1}^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \cdots & {a_{n-1}}^{n-2} \end{vmatrix}.$$

$$\Rightarrow V_n(a_1,\cdots,a_n) = V_{n-1}(a_1,\cdots,a_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i).$$

Chapitre 6 : déterminants

2ème méthode : par OEC évoluée :

Soit $Q(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{n-2}X^{n-2} + X^{n-1} \in \mathbb{K}[X]$ un quelconque polynôme unitaire de degré $n-1$. On effectue l'opération élémentaire suivante, laissant le polynôme invariant :

$$C_n \leftarrow \alpha_0 C_1 + \alpha_1 C_2 + \cdots + \alpha_{n-2}C_{n-1} + C_n.$$

En position (i, n), il apparaît le terme $\alpha_0 + \alpha_1 a_i + \cdots + \alpha_{n-2}{a_i}^{n-2} + {a_i}^{n-1} = Q(a_i)$ et ainsi :

$$V_n(a_1, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & {a_1}^{n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 1 & a_n & \cdots & {a_n}^{n-2} & Q(a_n) \end{vmatrix}$$

Et en développant par rapport à la dernière colonne, on obtient la formule de récurrence :

$V_n(a_1, \cdots, a_n) = V_{n-1}(a_1, \cdots, a_{n-1})Q(a_n)$

avec $Q(a_n) = \prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i)$.

Chapitre 6 : déterminants

Conclusion de l'exercice :

On remplace dans la formule de récurrence V_{n-1} par son expression en fonction de V_{n-2} et ainsi de suite jusqu'à $V_2 = a_2 - a_1$. Pour visualiser les termes qui apparaissent, écrivons la matrice dont le terme de place (i, j) est $a_j - a_i$:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_2 - a_1 & \cdots & \cdots & a_n - a_1 \\ a_1 - a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_n - a_{n-1} \\ a_n - a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} - a_n & 0 \end{pmatrix}$$

V_n est le produit de tous les termes de la matrice situés strictement au-dessus de la diagonale :

$$\boxed{V_n(a_1, \cdots, a_n) = \prod_{1 \leq i, j \leq n} \left(a_j - a_i\right)}.$$

Chapitre 6 : déterminants

Matrice inverse :

- Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle comatrice de A et on note $Com(A)$ la matrice des cofacteurs de A :

$$Com(A) = \left(\mathcal{A}_{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

$\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ où Δ_{ij}est le mineur de place (i,j) de A.

- Théorème 13 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

i. $A \times {}^tCom(A) = {}^tCom(A) \times A = \det(A) \times I_n$.

ii. Si A est inversible, alors $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, {}^tCom(A)}$.

Remarques :

∗ Pour une matrice inversible de taille 2, on a donc :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

∗ $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(-A + tr(A)I_2)$.

Chapitre 6 : déterminants

Matrices semblables :

$\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$: groupe linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire **l'ensemble des matrices inversibles de $\boldsymbol{\mathcal{M}_n}(\mathbb{K})$**. C'est un groupe pour le produit matriciel, dont l'élément neutre est I_n.

- Définition :

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables, et on note $\boldsymbol{A \sim B}$ lorsqu'il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que : $\boxed{A = P.B.P^{-1}}$.

- Proposition 14 :

i. $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

ii. Deux matrices sont semblables ssi ce sont les matrices d'un même endomorphisme dans des bases (éventuellement) différentes.

iii. Deux matrices semblables ont même trace et même déterminant.

Chapitre 6 : déterminants

Preuve :

i. On vérifie que la relation d'équivalence ($\sim$) est réflexive, symétrique et transitive.

- $A \sim A$ comme on le voit avec la matrice $P = I_n$ donc $\sim$ est réflexive.
- Si $A \sim B$, on a $A = PBP^{-1}$ avec $P \in \boldsymbol{\mathcal{GL}}_n(\mathbb{K})$. Alors $B = Q.A.Q^{-1}$où$Q = P^{-1} \in \boldsymbol{\mathcal{GL}}_n(\mathbb{K})$. Ainsi $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ donc $\sim$ est bien symétrique.
- Si $A \sim B$ et $B \sim C$, on écrit $A = PBP^{-1}$ et $B = Q.A.Q^{-1}$ avec P et $Q \in \boldsymbol{\mathcal{GL}}_n(\mathbb{K})$. Par associativité du produit matriciel, $A = PQCQ^{-1}P^{-1} = RCP^{-1}$ où $R = PQ \in \boldsymbol{\mathcal{GL}}_n(\mathbb{K})$. Ainsi $A \sim C$ donc $\sim$ est transitive.

ii. β et β' deux bases de E alors $A = [u]_\beta$ et $B = [u]_{\beta'}$ sont semblables car $[u]_\beta = P_{\beta,\beta'}$ et $[u]_{\beta'}$ $P_{\beta',\beta}$. En notant $P = P_{\beta,\beta'}$ et $P^{-1} = P_{\beta',\beta} \in \boldsymbol{\mathcal{GL}}_n(\mathbb{K})$, on a donc : $A = PBP^{-1}$.

Réciproquement, si $A = PBP^{-1}$, notons u l'endomorphisme associé à B dans la base canonique β_0 de $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,1}(\mathbb{K})$. On a $B = [u]_{\beta_0}$ et de plus P étant inversible, c'est la matrice de passage de la base β_0 à β de $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,1}(\mathbb{K})$ dont les vecteurs sont les vecteurs colonnes de $P. A = P_{\beta,\beta_0} \times [u]_{\beta_0} \times P_{\beta_0,\beta} = [u]_\beta \Rightarrow A$ et B représentent le même endomorphisme.

Chapitre 6 : déterminants

iii. $tr(MN) = tr(NM)$ $\forall$ matrices M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $A \sim B$ alors $A = PBP^{-1}$, donc $tr(A) = tr((PB)P^{-1}) = tr\big(P^{-1}(PB)\big) = tr(B)$.

De plus, si $A \sim B$ alors $A = PBP^{-1}$ $\Rightarrow$ $\det(A) = \det(PBP^{-1}) = \det(P) \times \det(B) \times \det(P^{-1}) = \det(B)$ car $\det(P^{-1}) = \frac{1}{\det(P)}$.

Remarque :

Le fait que deux matrices aient **même trace et même déterminant** est une **condition nécessaire** pour qu'elles soient semblables, mais pas suffisante.

Chapitre 6 : déterminants

Orientation d'un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie :

$E = \mathbb{R}$-ev de dimension finie. β et β' deux bases de E. D'après la formule de changement de base, on a :

$$1 = det_{\beta}(\beta) = det_{\beta}(\beta') \times det_{\beta'}(\beta).$$

Les deux réels $det_{\beta}(\beta')$ et $det_{\beta'}(\beta)$ ont même signe.

- Définition :

Deux bases β et β' sont de même sens ou ont la même orientation si $det_{\beta}(\beta') > 0$ ($\Leftrightarrow det_{\beta'}(\beta) > 0$).

- Définition :

On appelle orientation de E le choix d'une base β de E. On dit que E est orienté par β. Toute base de E de même sens que β est dite **directe**, toute base de E de sens contraire à celui de β est dite **indirecte**.

Chapitre 6 : déterminants

- Proposition 15 :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $\beta = (e_1, \cdots, e_n)$, la notation $u(\beta)$ désigne la famille $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$.

- Si $\det(u) > 0$ alors $\forall$ base de E, β et $u(\beta)$ ont même sens.
- Si $\det(u) < 0$ alors $\forall$ base de E, β et $u(\beta)$ sont de sens contraire.

Preuve :

$det_\beta\big(u(\beta)\big) = \det(u)$.

- Définition :

$\det(u) > 0 \Rightarrow$ l'automorphisme u conserve l'orientation où u est direct.

$\det(u) < 0 \Rightarrow$ l'automorphisme u est indirect.

Exemple :

Dans $\mathbb{R}^3$, une rotation et une symétrie par rapport à une droite sont directes ; une symétrie plane et la symétrie centrale $(-I_3)$ sont indirectes.

Chapitre 6 : déterminants

Exemples :

- Exemple 1 : Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et la base $\beta = (1, X, X^2)$ de E. On considère les polynômes $P_1 = X^2 + 1$; $P_2 = X$ et $P_3 = 2X - 1$:

$$\begin{aligned}
det_\beta(P_1, P_2, P_3) &= det_\beta(X^2 + 1, X\ , 2X - 1) \\
&= 2det_\beta(X^2 + 1, X, X) - det_\beta(X^2 + 1, X, 1) \\
&= -det_\beta(X^2 + 1, X, 1) \\
&= -det_\beta(X^2, X, 1) - det_\beta(1, X, 1) \quad \text{par linéarité} \\
&= -det_\beta(X^2, X, 1) \\
&= det_\beta(1, X, X^2) \\
&= \ det_\beta(\beta) = 1.
\end{aligned}$$

Autre méthode : $E = \mathbb{R}_2[X]$ et la base $\beta = (1, X, X^2)$. Soit la famille $(P_1, P_2, P_3) = (X^2 + 1, X\ , 2X - 1)$.

$$det_\beta(P_1, P_2, P_3) = \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 1.$$

Chapitre 6 : déterminants

- Exemple 2 : Soit E le plan euclidien usuel rapporté au repère orthonormé $(O,(\vec{\imath},\vec{\jmath}))$. Pour $\theta\in\mathbb{R}$, on note r_θ la rotation vectorielle de centre O et d'angle θ ; et s_θ la symétrie vectorielle d'axe dirigé par le vecteur $\cos\frac{\theta}{2}\vec{\imath}+\sin\frac{\theta}{2}\vec{\jmath}$.

On a :

- $r_\theta(\vec{\imath})=\cos\theta\,\vec{\imath}+\sin\theta\,\vec{\jmath}$ et $r_\theta(\vec{\jmath})=r_\theta\left(r_{\frac{\pi}{2}}(\vec{\imath})\right)=r_{\theta+\frac{\pi}{2}}(\vec{\imath})=\cos(\theta+\frac{\pi}{2})\,\vec{\imath}+\sin(\theta+\frac{\pi}{2})\,\vec{\jmath}=-\sin\theta\,\vec{\imath}+\cos\theta\,\vec{\jmath}$.
- $s_\theta(\vec{\imath})=\cos\theta\,\vec{\imath}+\sin\theta\,\vec{\jmath}$ et $s_\theta(\vec{\jmath})=s_\theta\left(s_{\frac{\pi}{2}}(\vec{\imath})\right)=s_{\theta-\frac{\pi}{2}}(\vec{\imath})=\cos(\theta-\frac{\pi}{2})\,\vec{\imath}+\sin(\theta-\frac{\pi}{2})\,\vec{\jmath}=\sin\theta\,\vec{\imath}-\cos\theta\,\vec{\jmath}$.

D'où : $[r_\theta]_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=R_\theta$ et $[s_\theta]_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}=S_\theta$.

On a alors :

$\det(r_\theta)=\det(R_\theta)=1$ et $\det(s_\theta)=\det(S_\theta)=-1$, $\Rightarrow r_\theta$ isométrie directe (ou déplacement) et s_θ isométrie indirecte (ou anti-déplacement).

Chapitre 6 : déterminants

- <u>Exercice 1</u> : Soient a, x, y et z dans $\mathbb{K}$. Calculons $\forall\, n \geq 2$, le déterminant de taille n :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & x & \cdots & \cdots & x \\ y & z & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ y & 0 & \cdots & 0 & z \end{vmatrix}_{(n)} .$$

Développement par rapport à la dernière ligne :

$$D_n = (-1)^{n+1}\, y \begin{vmatrix} x & x & \cdots & \cdots & x \\ z & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & z & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)} + (-1)^{2n} z D_{n-1}$$

$$\Rightarrow D_n = (-1)^{n+1}\, y \times (-1)^n\, x \begin{vmatrix} z & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & z \end{vmatrix}_{(n-2)} + (-1)^{2n}\, z\, D_{n-1}$$

$$\Rightarrow D_n = -x\, y\, z^{n-2} + z\, D_{n-1}.$$

Par récurrence avec $D_2 = \begin{vmatrix} a & x \\ y & z \end{vmatrix}_{(2)} = az - xy$, on a :

$\forall\, n \geq 2, D_n = a\, z^{n-1} - (n-1)\, x\, y\, z^{n-2}.$

CHAPITRE 6 : DÉTERMINANTS

- <u>Exercice 2</u> :

$f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \to f(P) \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{R}.$

$$\big(f(P)\big)(x) = (x-a)P(x) - \frac{1}{n!}(x-a)^n P^{(n-1)}(x) + P^{(n)}(x)$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Calculer $\det(f)$.

----

1) $\mathbb{R}_\mathrm{n}[\mathrm{X}]$: ensemble des polynômes de degré $\leq n$. Soient P_1 et $P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\big(f(\lambda\, P_1 + \mu\, P_2)\big)(x)$$
$$= (x-a)(\lambda\, P_1 + \mu\, P_2)(x) - \frac{1}{n!}(x-a)^n(\lambda\, P_1 + \mu\, P_2)^{(n-1)}(x) + (\lambda\, P_1 + \mu\, P_2)^{(n)}(x)$$
$$= \lambda\left[(x-a)P_1(x) - \frac{1}{n!}(x-a)^n {P_1}^{(n-1)}(x) + {P_1}^{(n)}(x)\right] + \mu\left[(x-a)P_2(x) - \frac{1}{n!}(x-a)^n {P_2}^{(n-1)}(x) + {P_2}^{(n)}(x)\right]$$
$$= \lambda\left[\big(f(P_1)\big)(x)\right] + \mu\left[\big(f(P_2)\big)(x)\right] \quad \Rightarrow f \text{ est } \textbf{linéaire}.$$

Chapitre 6 : déterminants

$P = \quad X^n + R(X)$ avec $d^\circ R < n$

$\Rightarrow f(P) = f(\lambda\, X^n) + f(R(X))$

soit $f(P) = \lambda\, f(X^n) + f(R(X))$ par linéarité de f.

Le degré de $R(X)$ est forcément $< n+1$ donc $d^\circ(R(x)) \leq n$. OK.

Il reste à prouver que $f(X^n) \in \mathbb{R}_n[X]$ c'est-à-dire montrer que le coefficient du terme de plus haut degré s'annule. En effet,

$$f(X^n) = (x-a)x^n - \frac{1}{n!}(x-a)^n (x^n)^{(n-1)} + (x^n)^{(n)}$$

$$= x^{n+1} - ax^n - \frac{1}{n!}(x-a)^n\, n!\, x + n!$$

$$= \; x^{n+1} - ax^n - x(x-a)^n + n!$$

Regardons le coefficient devant x^{n+1} : $(1-1)x^{n+1} = 0\, x^{n+1}$.

Car : $x(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1}(-a)^k$

$\Rightarrow x(x-a)^n = 1 \times x^{n+1} - a\, n\, x^n$

Donc $d^\circ(f(X^n)) \leq n$. D'où $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ et f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Chapitre 6 : déterminants

2) Pour le calcul du déterminant de f, la mauvaise idée serait de prendre comme base, la base canonique $(1, X, \cdots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

Bonne idée : prendre une autre base de $\mathbb{R}_n[X]$: $(1, (x-a), \cdots, (x-a)^n)$.

- $f(1) = (x-a)$
- pour $k < n-1$: $f\left((x-a)^k\right) = (x-a)^{k+1}$
- Pour $k = n-1$:

$$f\left((x-a)^{n-1}\right) = (x-a)^n - \frac{1}{n!}(x-a)^n\,(n-1)!$$

- Pour $k = n$:

$$f\left((x-a)^n\right) = (x-a)^{n+1} - \frac{1}{n!}(x-a)^n\, n!\,(x-a) + n! = n!$$

Chapitre 6 : déterminants

D'où $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & n! \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\frac{1}{n} & 0 \end{pmatrix}_{(n+1)}$.

En développant par rapport à la 1ère colonne, on a :

$$det(A) = n!\,(-1)^{n+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1-\frac{1}{n} \end{vmatrix}_{(n)}$$

$$\boxed{det(A) = (-1)^n n!\left(1-\frac{1}{n}\right)}.$$

FIN