Module :
réussir sa deuxième année

Mathématiques en Classes préparatoires

Filière PT

Sommaire général

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

Eléments propres d'un endomorphisme :

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (de dimension finie ou non) et f un endomorphisme de E.

- Définition :

- Un scalaire λ est dit **valeur propre** de f (vp) lorsque :

$$\exists\, x \in E, x \neq 0_E \text{ et } f(x) = \lambda x.$$

- Si λ est une vp de f, un vecteur $x \in E\backslash\{0_E\}$ tel que $f(x) = \lambda x$ est appelé **vecteur propre de *f*** (Vp) associé à la vp λ.

On retient déjà que, par définition, un vecteur propre n'est **jamais nul**.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

Exemples :

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2 et de base $\beta = (e_1, e_2)$.

- Soit f l'unique élément de $\mathcal{L}(E)$ défini par $f(e_1) = e_1 - e_2$ et $f(e_2) = -e_1 + e_2$. Posons $v = e_1 - e_2$ et $w = e_1 - e_2$. On a $f(v) = f(e_1) - f(e_2) = 2e_1 - 2e_2 = 2v$ et puisque $v \neq 0_E$ on peut conclure que : 2 est valeur propre de f et v est un vecteur propre associé.

De même, $f(w) = f(e_1) + f(e_2) = 0_E = 0_{\mathbb{R}} \times w$ et puisque $w \neq 0_E$ on peut conclure que : f admet la valeur propre 0 et un vecteur propre associé est w.

- Soit g l'unique élément de $\mathcal{L}(E)$ défini par $g(e_1) = e_2$ et $g(e_2) = -e_1$.

Montrons que g ne possède pas de valeur propre en raisonnant par l'absurde : si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une vp de g et $x = ae_1 + be_2 \in E \backslash \{0_E\}$ est un Vp associé, on a : $g(x) = \lambda x$ donc $g(ae_1 + be_2) =$⍰ $ae_1 + be_2) =$⍰ $ae_2 - be_1 = \lambda(ae_1 + be_2)$ d'où $(\lambda a + b)e_1 + (\lambda$ $- a)e_2 = 0_E$ ais puisque (e_1, e_2) est libre, cela entraîne $a =$ b et $b = -$ a et donc $a = -\lambda^2 a$ c'est-à-dire $(1 + \lambda^2)a = 0$ et ainsi $a = 0$ (car $\lambda \in \mathbb{R}$), puis $b = 0$ et finalement $x = 0_E$ ce qui est une contradiction.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

- <u>Théorème 1</u> :

Les propositions suivantes sont équivalentes :

i. λ est valeur propre de f
ii. $\mathrm{Ker}(f - \lambda id_E) \neq \{0_E\}$
iii. $f - \lambda id_E$ n'est pas injectif

Si de plus, E est de dimension finie, on peut ajouter à cette liste les propositions suivantes :

i. $f - \lambda id_E$ n'est pas un automorphisme de E
ii. $\det(f - \lambda id_E) = 0$.

CHAPITRE 7 : RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

Preuve :

Montrons que $(i) \Leftrightarrow (ii)$. On a :

λ est valeur propre de $f \Leftrightarrow \exists\, x \in E\backslash\{0_E\}, f(x) = \lambda x$

$\Leftrightarrow \quad \exists\, x \in E\backslash\{0_E\}, f(x) = \lambda id_E(x) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in E\backslash\{0_E\}, x \in Ker(f - \lambda id_E) \quad \Leftrightarrow$
$Ker(f - \lambda id_E) \neq \{0_E\}$.

Pour toute application linéaire u définie sur E, on connaît l'équivalence u injectif $\Leftrightarrow Ker(u) = \{0_E\}$ et on l'applique à $u = f - \lambda id_E$, donc $(ii) \Leftrightarrow (iii)$.
De même, si E est de dimension finie on a : u injectif $\Leftrightarrow u$ bijectif $\Leftrightarrow$ $\det(u) \neq 0$ ce qui prouve les autres équivalences.

En particulier on voit que : 0 est vp de $f \Leftrightarrow f$ n'est pas injectif.

- <u>Définition</u> :
  - On appelle **spectre** de f, et on note $\sigma(f)$, l'ensemble des valeurs propres de f.
  - Si $\lambda \in \sigma(f)$, on appelle **sous-espace propre** de f associé à la valeur propre λ le sous-espace vectoriel de E suivant :

$$E_\lambda = Ker(f - \lambda id_E).$$

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

Remarques :

- Les⍰ otations $\sigma(f)$ et E_λ ne sont pas universelles, on rencc rera par exemple $\mathrm{sp}(f)$ pour le spectre de f et $SEP_{f,}$ pour l'espace propre associé à λ.
- $\sigma(f)$ est une partie de $\mathbb{K}$, éventuellement vide.
- Soit $\lambda \in \sigma(f)$. Pour tout $x \in E$ on a : $f(x) = \lambda x \Leftrightarrow x \in E_\lambda$ et donc E_λ est l'ensemble des vecteurs propres de f associés à la vp λ auquel on ajoute le vecteur nul 0_E. Autrement dit, l'ensemble des Vp de f associés à la vp λ est : $E_\lambda \setminus \{0_E\}$.
- Si $x \in E_\lambda$ on a $f(x) = \lambda x \in E_\lambda$ car E_λ est un espace vectoriel. Ainsi E_λ est stable par f ($f(E_\lambda) \subset E_\lambda$). De plus, l'endomorphisme induit par f sur E_λ est λid_{E_λ} c'est-à-dire l'homothétie de E_λ de rapport λ. En d'autres termes, E_λ est un sous-espace vectoriel de E sur lequel f agit comme l'homothétie de rapport λ.

CHAPITRE 7 : RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

Exemple :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev (non-réduit à l'élément nul) et $f = k.id_E$ l'homothétie de rapport k.

On voit que k est valeur propre de f et l'espace propre associé est E lui-même. De plus, k est l'unique vp de f car si λ est une vp de f et x un Vp associé, on a $kx = f(x) = \lambda x$ et donc $\lambda = k$ car $x \neq 0_E$. Ainsi $\sigma(f) = \{k\}$ et $E_k = E$.

- <u>Théorème 2</u> :

Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de f et $x_1, \cdots, x_p$ des vecteurs propres associés respectivement (x_i est un Vp de f associé à la vp λ_i).

La famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est libre.

Autrement dit, toute famille de vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

Preuve :

On procède par récurrence sur l'entier p. La propriété est vraie lorsque $p = 1$: la famille $x_1 \neq 0_E$. Supposons la propriété vraie au rang $p-1$ (p $\in \mathbb{N}^*$) et montrons-là au rang p.

Soit $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p = 0_E$. On applique f qui est linéaire et on utilise que $f(x_i) = \lambda_i x_i$:

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \cdots + \alpha_p \lambda_p x_p = 0_E.$$

D'autre part, en multipliant l'équation de départ par λ_p, il vient :

$$\alpha_1 \lambda_p x_1 + \cdots + \alpha_p \lambda_p x_p = 0_E.$$

D'où, en soustrayant (1) et (2) membre à membre :

$$(\lambda_1 - \lambda_p)\alpha_1 x_1 + \cdots + (\lambda_{p-1} - \lambda_p)\alpha_{p-1} x_{p-1} = 0_E.$$

Or la famille $(x_1, \cdots, x_p)$ est libre d'après l'hypothèse de récurrence, donc pour tout $i \in \{1, \cdots, p-1\}$ on a $(\lambda_i - \lambda_p)\alpha_i = 0$. De plus, $\lambda_i - \lambda_p \neq 0$ car les valeurs propres sont supposées distinctes, et ainsi pour tout $i \in \{1, \cdots, p-1\}$ on a $\alpha_i = 0$. Il reste $\alpha_p x_p = 0_E$ mais comme $x_p \neq 0_E$ c'est que $\alpha_p = 0$. On a montré que $(x_1, \cdots, x_p)$ est libre, ce qui achève la récurrence.

CHAPITRE 7 : RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

<u>Eléments propres d'une matrice</u> :

On adapte ici aux matrices carrées le langage géométrique de la partie précédente. Soient $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- <u>Définition</u> :

- Un scalaire λ est dit **valeur propre** de A lorsque :

$$\exists\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), X \neq 0 \text{ et } AX = \lambda X.$$

- Si λ est une vp de A, un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \backslash \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$ est appelé **vecteur propre de *A*** associé à la vp λ.
- On appelle **spectre** de A, et on note $\sigma(A)$, l'ensemble des valeurs propres de A.
- Si $\lambda \in \sigma(A)$, on appelle **sous-espace propre** de A associé à la valeur propre λ□ e sous-espace vectoriel d□ $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ suivant :

$$E_\lambda = Ker(f - \quad id_E) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \backslash \{0\}, AX = \quad X\}.$$

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

Remarque :

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut être considérée comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et, donc on peut être amené à distinguer l'ensemble de ses valeurs propres réelles, noté $\sigma_{\mathbb{R}}(A)$ et l'ensemble de ses valeurs propres complexes, noté $\sigma_{\mathbb{C}}(A)$.

Exemple :

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de base (e_1, e_2) et g défini par $g(e_1) = e_2$ et $g(e_2) = -e_1$. Soit $A = [g]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. On retrouve le fait que $\sigma(g) = \sigma_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ car pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \neq 0$. Par contre, le même calcul prouve que A possède deux valeurs propres complexes : $\sigma_{\mathbb{C}}(A) = \{i, -i\}$.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

Exercice :

Soient f et $g \in \mathcal{L}(E)$ telles que $f \circ g = g \circ f$. On dit que f et g commutent. Alors les espaces propres de f et g sont stables par g et réciproquement.

Preuve :

Soit $\lambda \in \sigma(f)$ et E_λ l'espace propre associé. Soit $x \in E_\lambda$, montrons que $g(x) \in E_\lambda$:

On a $f\big(g(x)\big) = f \circ g(x) = g \circ f(x)$

$\Rightarrow f\big(g(x)\big) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$

$\Rightarrow g(x) \in E_\lambda$ donc $g(E_\lambda) \subset E_\lambda$.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

Polynôme caractéristique :

n désigne un élément de $\mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n.

- Définition :

• Soit $f \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(E)$. On appelle polynôme carac istique de f l'application $\chi_f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ définie par : $\chi_f(\lambda) = \det(f - \quad id_E)$.

• Soit $A \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de A l'application $\chi_A : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ définie par : $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.

Pour $f \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(E)$, β base de E et $A = [f]_\beta$ on a : $\chi_f(\lambda) = \det(f - \lambda id_E) = \det\left([f - \lambda id_E]_\beta\right) = \det(A - \lambda I_n) = \chi_A(\lambda)$ et donc $\chi_f = \chi_A$. Autrement dit, le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est celui de sa matrice dans n'importe quelle base.

Comme on l'a vu précédemment, le polynôme caractéristique permet de déterminer les valeurs propres de A ou f :

- Théorème 3 :

Pour $A \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_n(\mathbb{K})$, $\sigma(A)$ est l'ensemble des racines de χ_A. Pour $f \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(E)$, $\sigma(f)$ est l'ensemble des racines de χ_f.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

Preuve :
Selon le théorème 1, $\lambda \in \sigma(f) \Leftrightarrow \det(f - \lambda id_E) = 0 \Leftrightarrow \chi_f(\lambda) = 0$. Idem pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple :
Soit A est une matrice triangulaire supérieure
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_{nn} \end{pmatrix}$ (cas particulier : A est diagonale).

Alors $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$
$= (a_{11} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$ et ainsi $\sigma(A) = \{a_{11}, \cdots, a_{nn}\}$.

On dit dans ce cas que **les valeurs propres de A sont en évidence sur la diagonale**.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

- Théorème 4 :

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \chi_A$ est un polynôme de degré n, de coefficient dominant $(-1)^n$ et de terme constant $\det(A)$:

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \det(A)\,.$$

Idem pour $f \in \mathcal{L}(E)$.

Exemple :

Avec $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a : $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A)$.

CHAPITRE 7 : RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

Remarque :

Les valeurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ étant les racines d'un polynôme de degré n, on en déduit qu'une matrice de taille n (ou un endomorphisme en dimension n) possède au plus n valeurs propres. De plus, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors χ_A est scindé (théorème de d'Alembert-Gauss) et donc A possède au moins une valeur propre complexe.

- <u>Théorème 5</u> :

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont semblables, alors elles ont même polynôme caractéristique.

Preuve :

Supposons $A \sim B$. Il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$ et donc pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det(PBP^{-1} - \lambda I_n) = \det(P(B - \lambda I_n)P^{-1})$$
$$= \det(P)\det(B - \lambda I_n)\det(P^{-1}) = \det(B - \lambda I_n) = \chi_B(\lambda)$$

car $\det(P^{-1}) = \frac{1}{\det(P)}$.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

Remarques :

- Le polynôme caractéristique est donc un invariant de similitude, tout comme le rang, la trace et le déterminant.
- La réciproque de ce théorème est fausse. Par exemple, les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = 0_2$ ont même polynôme caractéristique : $\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda) = \lambda^2$ mais elles ne sont pas semblables car $A = P0_2P^{-1} \Rightarrow A = 0_2$ absurde.

Pour insister : les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont même rang, même trace, même déterminant et même polynôme caractéristique et pourtant elles ne sont pas semblables car $B^2 = 0_4$ et $A^2 \neq 0_4$.

CHAPITRE 7 : RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

- Définition :

On appelle ordre de multiplicité d'une valeur propre λ de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (ou de $f \in \mathcal{L}(E)$, dimension finie) la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme χ_A (ou χ_f).

On rappelle la caractérisation suivante de l'ordre de multiplicité d'u racine d'un p nôme P :

λ est racine de le multiplicité

$\Leftrightarrow P(X) = (X - \quad {}^{m}Q(X)$ avec $Q(\quad) \neq 0$

$\Leftrightarrow P(\lambda) = P'^{(\lambda)} = \cdots = P^{(m-1)}(\lambda) = 0$ et $P^{(m)}(\lambda) \neq 0$.

Exemple :

Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ a pour polynôme caractéristique $\chi_A(X) = -(X-3)^2(X+1)$ alors $\sigma(A) = \{-1, 3\}$ et on dit que -1 est une valeur propre simple de A et 3 est une valeur propre double de A.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

- <u>Théorème 6</u> :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ (E de dimension finie) et λ une valeur propre de f. On a :

- d la dimension du sous-espace propre E_λ,
- m la multiplicité de la valeur propre λ.

On a : $\boxed{1 \leq d \leq m}$. Même résultat pour les matrices.

Preuve :

Puisque λ est valeur propre de f, $E_\lambda = Ker(f - \lambda id_E) \neq \{0_E\}$ et donc cet espace vectoriel est de dimension $d \geq 1$. Soit $(e_1, \cdots, e_d)$ une base de l'espace vectoriel E_λ. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille libre $(e_1, \cdots, e_d)$ en une base $\beta = (e_1, \cdots, e_d, e_{d+1}, \cdots, e_n)$ de E. Pour $i \in \{1, \cdots, d\}$ on a $e_i \in E_\lambda$ donc $f(e_i) = \lambda e_i$. Ainsi la matrice de f dans la base β est de la forme suivante :

$$[f]_\beta = \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_d \\ e_{d+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{pmatrix} \lambda & & (0) & \\ & \ddots & & M \\ (0) & & \lambda & \\ & & & \\ & (0) & & N \end{pmatrix}$$

où $N \in \mathcal{M}_{n-d}(\mathbb{K})$ et $M \in \mathcal{M}_{d,n-d}(\mathbb{K})$.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

$$\chi_f(X) = \det(f - Xid_E) = \det\big([f]_\beta - XI_n\big) = \begin{vmatrix} (\lambda - X)I_d & M \\ (0) & N - XI_{n-d} \end{vmatrix}$$

$= (\lambda - X)^d \times \chi_N(X)$ (triangulaire supérieure par blocs).

Or $\chi_N(X)$ est un polynôme, donc $(\lambda - X)^d$ divise $\chi_f(X)$ ce qui montre que λ est racine de χ_f de multiplicité supérieure ou égale à d, c'est-à-dire : $m \geq d$.

Remarques :

- En particulier, on voit que si λ est une valeur propre simple de f, alors E_λ est une droite vectorielle ($m = 1 \Rightarrow d = 1$).
- On peut généraliser le résultat de calcul matriciel vu dans la preuve : si A est une matrice triangulaire supérieure par blocs : $A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & \boxed{A_p} \end{pmatrix}$ où le bloc A_i est de taille n_i, alors on a :

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_n) = \det\big(A_1 - XI_{n_1}\big) \times \cdots \times \det\left(A_p - XI_{n_p}\right) = \chi_{A_1}(X) \cdots \chi_{A_p}(X).$$

Autrement dit, comme le déterminant, le polynôme caractéristique se calcule par blocs.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

Exercice :

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$:

1er cas : Si A (ou B) inversible alors $AB \sim BA$ ($\Rightarrow \exists\, P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = PBAP^{-1}$ pour $P = A$, $AB = A(BA)A^{-1}$) car $AB = A(BA)A^{-1} \Rightarrow \chi_{AB} = \chi_{BA}$.

2ème cas : Si A et B ne sont pas inversibles (matrices quelconques), il suffit de calculer :

$$\begin{pmatrix} \lambda 1_n & A \\ B & 1_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1_n & 0_n \\ A & \lambda 1_n \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \lambda 1_n & A \\ B & 1_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1_n & A \\ 0_n & -\lambda 1_n \end{pmatrix}.$$

CHAPITRE 7 : RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

<u>Diagonalisation</u> :

n désigne un élément de $\mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$-ev de **dimension finie** n.

- <u>Définition</u> :

• $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **diagonalisable** si A est semblable à une matrice diagonale. Autrement dit, si :

$$\exists\, P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \exists\, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$$
$$D \text{ diagonale}, A = PDP^{-1}.$$

• $f \in \mathcal{L}(E)$ est dite **diagonalisable** si il existe une base β de E telle que $[f]_\beta$ soit diagonale.

→ Diagonaliser A, c'est trouver P et D qui conviennent.

→ Diagonaliser f, c'est trouver β telle que $[f]_\beta$ soit diagonalisable.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

Remarques :

- Toute matrice diagonale est diagonalisable : $A = I_n A (I_n)^{-1}$.
- Exemple de matrice non diagonalisable : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si $M = PDP^{-1}$ avec $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$: $M^2 = PDP^{-1}.PDP^{-1} = PD^2P^{-1} = P\begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix}P^{-1}$, or $M^2 = 0 \Rightarrow D^2 = 0 : D = I_n D {I_n}^{-1}$.
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et β une base quelconque de E. f est diagonalisable $\Leftrightarrow [f]_\beta$ est diagonalisable.

En effet, si β' désigne une autre base de E et $P = P_{\beta,\beta'}$ désigne la matrice de passage de β à β', on a $P^{-1} = P_{\beta',\beta}$ et la formule de changement de base s'écrit : $\boxed{[f]_\beta = P[f]_{\beta'}P^{-1}}$.

De plus, toute matrice inversible est une matrice de passage, et donc on a l'équivalence :

f diagonalisable $\Leftrightarrow \exists\, \beta'$ base de E telle que $[f]_{\beta'}$ soit diagonale $\Leftrightarrow [f]_\beta$ est diagonalisable.

CHAPITRE 7 :
RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

- <u>Caractérisation des matrices et endomorphismes diagonalisables</u> :

La caractérisation suivante découle directement de la définition.

- <u>Théorème 7</u> :

• $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E formée de vecteurs propres de f. Si c'est le cas, toute écriture $[f]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ équivaut à dire que β s'écrit $\beta = (v_1, \cdots, v_n)$ où $\forall\, i \in \{1, \cdots, n\}$, v_i est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_i.

• $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de A. Si c'est le cas, toute écriture $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$ équivaut à dire $P = (V_1 | \cdots | V_n)$ où $\forall\, i \in \{1, \cdots, n\}$, V_i est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

Preuve :

Notons $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

- Si $\beta = (v_1, \cdots, v_n)$ est une base de E, alors : $[f]_\beta = D \Leftrightarrow \forall\, i \in \{1, \cdots, n\},\ f(v_i) = \lambda v_i$ et puisque v_i ne peut être nul, ça équivaut à dire que $\forall\, i \in \{1, \cdots, n\}$, λ_i est une valeur de f et v_i un vecteur propre associé.
- Notons $P = (V_1|\cdots|V_n)$. P est inversible si et seulement si ses colonnes $V_1, \cdots, V_n$ forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Si c'est le cas, alors : $A = PDP^{-1} \Leftrightarrow AP = PD$ mais $AP = (AV_1|\cdots|AV_n)$ et $PD = (\lambda_1 V_1|\cdots|\lambda_n V_n)$ et donc : $A = PDP^{-1} \Leftrightarrow \forall\, i \in \{1, \cdots, n\},\ AV_i = \lambda_i V_i$ et donc V_i, qui n'est pas nul, est un Vp de A pour la vp λ_i.

CHAPITRE 7 : RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

Remarques :

- De manière générale, pour une matrice inversible $P = (V_1|\cdots|V_n)$, la traduction matricielle de la formule de changement de base pour un endomorphisme s'écrit :

$$A = P \times \begin{array}{c} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{array} \begin{pmatrix} & & \\ & * & \\ & & \end{pmatrix} \times P^{-1}$$

ce qui nous sera très utile par la suite.

- Si A (ou f) est diagonalisable et semblable à $D = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ alors A (ou f) a même polynôme caractéristique que D (voir th. 5) c'est-à-dire $(-1)^n(X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_n)$ et donc on voit que la matrice D porte nécessairement sur sa diagonale les valeurs propres de A (ou de f) écrites autant de fois que leur multiplicité.

- Il n'y a donc pas unicité de la matrice D dans l'écriture $A = PDP^{-1}$ puisqu'on voit qu'on peut ranger les vp de A dans un ordre quelconque sur la diagonale (il suffit de ranger les vecteurs propres $V_1, \cdots, V_n$ trouvés dans l'ordre correspondant). Par exemple, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède n vp distinctes, il y a $n!$ matrices diagonales D semblables à A.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

Même si D est imposée, il n'y a pas unicité d'une matrice inversible P réalisant $A = PDP^{-1}$. Par exemple, si $A = I_n$ on a $A = PI_nP^{-1}$ avec n'importe quelle matrice P inversible.

- On voit que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède une unique vp λ et $A \neq \lambda I_n$ alors A n'est pas diagonalisable. En effet, si A était diagonalisable on aurait $A = P(\lambda I_n)P^{-1} = \lambda I_n$. Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable car elle possède l'unique valeur propre 2 et n'est pas égale à $2I_2$.

Voyons maintenant une caractérisation plus précise des endomorphismes (ou matrices) diagonalisables.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

- Théorème 8 :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note :

$$\begin{cases} \lambda_1, \cdots, \lambda_p \text{ les valeurs propres } \textbf{distinctes} \text{ de f dans } \mathbb{K}, \\ m_1, \cdots, m_p \text{ leurs mutiliplicités respectives,} \\ d_1, \cdots, d_p \text{ la dimension des sous} - \text{espaces propres respectivement associées.} \end{cases}$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} f \text{ diagonalisable} &\Leftrightarrow \chi_f \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \text{ et } \forall\, i \in \{1, \cdots, p\}, d_i = m_i \\ &\Leftrightarrow d_1 + \cdots + d_p = n. \end{aligned}$$

Si c'est le cas, on obtient une base de diagonalisation de f par recollement de bases de chaque sous-espaces propres de f.

Rappelons qu'un polynôme est dit scindé sur $\mathbb{K}$ lorsqu'il s'écrit comme un produit de facteurs de degré 1 à coefficients dans $\mathbb{K}$. Ainsi χ_f est scindé si et seulement si il s'écrit : $\chi_f = (-1)^n (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_p)^{m_p}$.

CHAPITRE 7 :
RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

Remarques :

- Autrement dit, un endomorphisme est diagonalisable **ssi** son polynôme caractéristique est scindé et la dimension de chaque espace propre est égale à la multiplicité de la vp correspondante, **ssi** la somme des dimensions des espaces propres vaut n.
- On a bien sûr le même résultat pour les matrices.
- Pour tout endomorphisme f on a : $d_1 + \cdots + d_p \leq m_1 + \cdots + m_p \leq n$. La première inégalité vient de $\forall\, i, d_i \leq m_i$ et la seconde vient du fait que $(X - \lambda_1)^{m_1} \cdots \left(X - \lambda_p\right)^{m_p}$ divise χ_f. La première inégalité est une égalité **ssi** $\forall\, i, d_i = m_i$, et la seconde inégalité est une égalité **ssi** χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.
- Une matrice de taille n (ou un endomorphisme en dimension n) qui possède n valeurs propres distinctes est une condition suffisante (mais pas nécessaire) pour être diagonalisable. En effet, on a alors $d_1 + \cdots + d_p \geq n$. Le fait de posséder n valeurs propres distinctes est une condition suffisante (mais pas nécessaire) pour être diagonalisable.
- Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tous les polynômes sont scindés.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

Exemple : Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

<u>Etape 1</u> : Valeurs propres. On calcule le polynôme caractéristique de A (en développant par rapport à la 2ème colonne)

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda) = -\lambda(\lambda-1)^2.$$

On en déduit que χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et $\sigma_A = \{0, 1\}$. Plus précisément : 0 est vp simple de A, donc E_0 est une droite, et 1 est vp double de A, donc $\dim(E_1) \in \{1, 2\}$. A ce stade, on ne sait pas encore si A est diagonalisable ou non (dépend de $\dim(E_1)$).

CHAPITRE 7 :
RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

Etape 2 : Espaces propres. On détermine une base de chaque espace propre de A.

- $E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Ker}(B)$ où on a posé $B = A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. On voit que B est de rang 1, donc d'après le théorème du rang, son noyau est de dimension $3 - 1 = 2$, ce qui prouve que A est diagonalisable (théorème 8).

Pour déterminer une base de E_1 on résout le système :

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ x + z = 0 \\ -2x - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + z = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Si on pose $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a donc $E_1 = \mathbb{R}V_1 \oplus \mathbb{R}V_2$.

CHAPITRE 7 : RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

- Pour déterminer la droite $E_0 = Ker(A)$ on peut résoudre de même le système $AX = 0$ ou bien utiliser :

Si $M = (C_1|\cdots|C_n)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ alors :

$$\boxed{MX = x_1C_1 + \cdots + x_nC_n}.$$

Ici, on repère que les colonnes C_1, C_2, C_3 de A vérifient la relation $C_1 + C_2 = 2C_3$ donc $1 \times C_1 + 1 \times C_2 + (-2) \times C_3 = 0$ et donc $AV_3 = 0$ où on a posé $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Comme E_0 est une droite et $\mathbb{R}V_3 \subset E_0$, on a l'égalité $E_0 = \mathbb{R}V_3$.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

- Conclusion. La famille (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car obtenue par recollement de bases des espaces propres de A, donc $P = (V_1|V_2|V_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est inversible (inutile de calculer $\det(P)$) et on a : $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$. Il reste éventuellement à calculer P^{-1}, ce qu'on fait si besoin en résolvant le système $PX = Y$.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

- Exemples : symétries et projections :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et F, G deux sev de E supplémentaires. On a $E = F \bigoplus G$ et tout vecteur x de E se décompose de manière unique suivant cette somme directe : $x = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$.

- Définition :

• Le projecteur (ou la projection) sur F parallèlement à G est l'application linéaire $p_{F,G} = \begin{pmatrix} E \to E \\ x = f + g \to f \end{pmatrix}$.

• La symétrie par rapport à F parallèlement à G est l'application linéaire $s_{F,G} = \begin{pmatrix} E \to E \\ x = f + g \to f - g \end{pmatrix} = 2p_{F,G} - id_E$.

On obtient immédiatement les relations $\boxed{\left(p_{F,G}\right)^2 = p_{F,G}}$ et $\boxed{\left(s_{F,G}\right)^2 = id_E}$ (le carré étant pris au sens de la composition). Ces relations caractérisent les projections et symétries.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

- Proposition 9 :

• Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p^2 = p$. Alors p est le projecteur sur $F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - id_E)$ parallèlement à G =Ker(p).

• Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que $s^2 = id_E$. Alors s est la symétrie par rapport à $F = \mathrm{Ker}(s - id_E)$ parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(s + id_E)$.

Preuve :

• Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p^2 = p$. Montrons d'abord que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - id_E)$. Si $x \in \mathrm{Ker}\,(p - id_E)$ alors $x = p(x) \in \mathrm{Im}(p)$ d'où l'inclusion $\mathrm{Ker}\,(p - id_E) \subset \mathrm{Im}\,(p)$. Réciproquement, si $x \in \mathrm{Im}(p)$ alors $\exists\, y \in E, x = p(y)$ donc $p(x) = p^2(y) = p(y) = x$ donc $x \in \mathrm{Ker}(p - id_E)$ d'où l'inclusion $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(p - id_E)$ et finalement l'égalité.

Notons $F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - id_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$ et montrons que $E = F \bigoplus G$. On a d'abord $F \cap G = \{0_E\}$ car si $x \in F \cap G$ alors $x \in F \Rightarrow p(x) = x$ et $x \in G \Rightarrow p(x) = 0_E$ donc $x = 0_E$. De plus, d'après le théorème du rang, on a $\dim(E) = \dim\big(\mathrm{Im}(p)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(p)\big) = \dim(F) + \dim(G)$ et la somme $E = F \bigoplus G$ est prouvée (ou $x = p(x) + (x - p(x))$ avec $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in G$).

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

Enfin, pour $x \in E$ on écrit $x = f + g$ suivant cette somme directe. Il vient $p(x) = p(f) + p(g)$ mais $p(f) = f$ car $f \in F$ et $p(g) = 0_E$ car $g \in G$, donc $p(x) = f$ ce qui prouve que $p = p_{F,G}$ comme voulu.

- Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que $s^2 = s$. Notons $F = \mathrm{Ker}(s - id_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + id_E)$ et montrons que $E = F \bigoplus G$. On a d'abord $F \cap G = \{0_E\}$ car si $x \in F \cap G$ alors $x \in F \Rightarrow s(x) = x$ et $x \in G \Rightarrow s(x) = -x$ donc $x = 0_E$. De plus, pour tout $x \in E$ on peut écrire que $x = \frac{1}{2}(x + s(x)) + \frac{1}{2}\big(x - s(x)\big) = f + g$ et on a $s(f) = \frac{1}{2}(s(x) + x) = f$ donc $f \in F$ et $s(g) = \frac{1}{2}(s(x) - x) = -g$ donc $g \in G$. Ainsi $E = F + G$ et finalement $E = F \bigoplus G$.

Enfin, pour tout $x \in E$ on écrit $x = f + g$ suivant cette somme directe et alors $s(x) = s(f) + s(g) = f - g$ ce qui prouve que $s = s_{F,G}$. Remarque : on pouvait aussi poser $p = \frac{1}{2}(s + id_E)$ et constater que p est un projecteur.

CHAPITRE 7 : RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

Remarque :

Dans les deux cas, F est **l'ensemble des points fixes** de l'endomorphisme p ou s, c'est-à-dire l'espace propre associé à la valeur propre 1. On peut voir que ces endomorphismes sont diagonalisables.

- <u>Proposition 10</u> :

Soit E de dimension n, s une symétrie et p un projecteur de E, s et p sont diagonalisables. Plus précisément :

- Il existe une base β de E telle que $[p]_\beta = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ où $r = rg(p) = \dim(\mathrm{Ker}(p - id_E))$.
- Il existe une base β de E telle que $[s]_\beta = \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & -I_{n-d} \end{pmatrix}$ où $d = \dim(\mathrm{Ker}(s - id_E))$.

De telles bases sont dites privilégiées pour p ou s.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

Preuve :

Dans les deux cas, on peut écrire $E = F \bigoplus G$ donc on obtient une base β de E en recollant une base de F et une base de G. On a : $\forall\, x \in F$, $p(x) = x$ et $\forall\, x \in G$, $p(x) = 0_E$ d'où la forme de $[p]_\beta$. De plus, $r = \dim(F) = \mathrm{rg}(p)$. De même, $\forall\, x \in F$, $s(x) = x$ et $\forall\, x \in G$, $s(x) = -x$ d'où la forme de $[s]_\beta$.

Remarque :

On voit ainsi que pour tout projecteur p de E, on a : $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{tr}\left([p]_\beta\right) = r = \mathrm{rg}(p)$. On retient : $\boxed{\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)}$.

Pour une symétrie on a : $\mathrm{tr}(\,s\,) = 2d - n$ où $d = \dim(\mathrm{Ker}(s - id_E))$.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

Trigonalisation :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

Lorsqu'une matrice A n'est pas diagonalisable, on peut quand même chercher une matrice semblable à A qui soit d'une forme simple. Dans cette partie, on cherche une matrice triangulaire supérieure semblable à A.

- Définition :

• $A \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_n(\mathbb{K})$ est dite **trigonalisable** si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure. Donc, si :

$$\exists\, P \in \boldsymbol{\mathcal{GL}}_n(\mathbb{K}),\ \exists\, T \in \boldsymbol{\mathcal{TS}}_n(\mathbb{K}),\ A = PTP^{-1}.$$

• $f \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(E)$ est dit **trigonalisable** si il existe une base β de E telle que $[f]_\beta$ soit triangulaire supérieure.

CHAPITRE 7 : RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

Remarques :

- Une matrice diagonale étant triangulaire supérieure, toute matrice ou endomorphisme diagonalisable est bien sûr trigonalisable. Ainsi la trigonalisation, bien que moins intéressante que la diagonalisation, concerne plus de matrices ou endomorphismes.
- On rappelle que $\mathcal{TS}_n(\mathbb{K})$ désigne le sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices triangulaires supérieures et que $\mathcal{T}\ \mathcal{I}_n(\mathbb{K})$ désigne celui des matrices triangulaires inférieures. Ils sont tous deux de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

CHAPITRE 7 : RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

- Soit $T \in \boldsymbol{\mathcal{T}\mathcal{I}}_n(\mathbb{K})$. Si on pose $P = \begin{pmatrix} (0) & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & (0) \end{pmatrix}$ alors on vérifie facilement que $T' = PTP^{-1} \in \boldsymbol{\mathcal{T}\mathcal{S}}_n(\mathbb{K})$.

Si A est semblable à une matrice triangulaire inférieure, alors $A \sim T$ et $T \sim T'$ montre que $A \sim T'$ (transitivité de la similitude matricielle) et donc A est encore trigonalisable.

De même si $f \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(E)$ et $\beta = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E telle que $[f]_\beta$ soit triangulaire inférieure, alors en posant $\beta' = (e_n, \cdots, e_1)$ on voit que $[f]_{\beta}'$ est triangulaire supérieure. Autrement dit, pour la trigonalisation, on pourra considérer indifféremment des matrices triangulaires supérieures ou inférieures.

Le théorème suivant caractérise les matrices ou endomorphismes trigonalisables.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

- <u>Théorème 11</u> :
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable $\Leftrightarrow \chi_A$ est scindé sur $\mathbb{K}$.
- $f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable $\Leftrightarrow \chi_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$.

Preuve :

Le sens direct ($\Rightarrow$) est évident. En effet, si par exemple $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable alors on a :

$A \sim T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ donc $\chi_A(X) = \chi_T(X) = (-1)^n(X - \lambda_1)\cdots(X-\lambda_n)$ qui est bien scindé sur $\mathbb{K}$. La réciproque se prouve par récurrence sur n et est admise.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

Remarques :

- Tout polynôme étant scindé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (théorème de d'Alembert-Gauss), on voit que toute matrice de $\boldsymbol{\mathcal{M}}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable, de même que tout endomorphisme sur un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie. Une matrice de $\boldsymbol{\mathcal{M}}_n(\mathbb{R})$ qui n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$ peut être considérée comme un élément de $\boldsymbol{\mathcal{M}}_n(\mathbb{C})$ et alors on peut la trigonaliser sur $\mathbb{C}$ mais dans ce cas P et T sont complexes, même si A est réelle.
- On voit que, comme pour la diagonalisation, la matrice T porte sur sa diagonale les valeurs propres de A ou de f, écrites autant de fois que leur multiplicité. Deux matrices semblables ont même trace et même déterminant, et donc dès que χ_A est scindé, on peut affirmer :

$$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \text{ et } \det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

ce qui peut s'avérer utile si on connaît déjà toutes les vp sauf une ou deux.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

- Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé. Trois cas se présentent :

• Si A possède trois valeurs propres simples, alors A est diagonalisable.

• Si A possède une valeur propre double λ et une valeur propre simple μ, ou bien A est diagonalisable, ou bien A ne l'est pas et alors on peut montrer qu'elle est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Pour la trigonaliser, on cherchera donc la matrice de passage P sous la forme $P = (V_1|V_2|V_3)$ où V_1, V_2, V_3 sont tels que : $\begin{cases} AV_1 = \mu V_1 \\ AV_2 = \lambda V_2 \\ AV_3 = \lambda V_3 + V_2 \end{cases}$ et $\det(P) \neq 0$. Autrement dit, V_1 et V_2 sont des Vp (quelconques) associés respectivement aux vp μ et λ il reste à déterminer .

- Si A possède une valeur propre triple λ, ou bien A est diagonalisable (mais alors c'est que $A = \lambda I_3$), ou bien A ne l'est pas et alors on peut montrer qu'elle est semblable à une des deux matrices suivantes :

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

$A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ si $\dim(E_\lambda) = 2$ et $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ si $\dim(E_\lambda) = 1$.

On formera donc $P = (V_1|V_2|V_3)$ avec : $\begin{cases} AV_1 = \lambda V_1 \\ AV_2 = \lambda V_2 \\ AV_3 = \lambda V_3 + V_2 \end{cases}$ dans le premier cas, et $\begin{cases} AV_1 = \lambda V_1 \\ AV_2 = \lambda V_2 \\ AV_3 = \lambda V_3 + V_2 \end{cases}$ dans le second cas.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

Exemple : Réduire la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

<u>Etape 1</u> : Valeurs propres. On obtient $\chi_A(\lambda)$ par la règle de Sarrus et on voit bien que 1 est racine évidente :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = -(\lambda-1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$$
$$= -(\lambda-1)(\lambda-2)^2.$$

χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ donc A est trigonalisable. 1 est vp simple de A et 2 est vp double.

<u>Etape 2</u> : Espaces propres :

- E_1 est une droite car la vp 1 est simple. On a $E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Ker}(B)$

où $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. On voit que les colonnes de B vérifient $C_1 + C_2 = 0$

donc $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_1$ et donc $E_1 = \mathbb{R}V_1$.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

- E_2 =Ker$(A-2I_3)$ =Ker(C) où $C=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$. On voit que C est de rang 2 donc Ker$(C)=E_2$ est de dimension $3-2=1$ ce qui montre que A n'est pas diagonalisable (théorème 8). Les colonnes de C vérifient $C_2+C_3=0$ donc, puisque E_2 est une droite, $E_2=\mathbb{R}V_2$ où $V_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

<u>Etape 3</u> : Conclusion. Il reste à déterminer un vecteur V_3 tel que $AV_3=2V_3+V_2$ et tel que (V_1,V_2,V_3) soit une base de $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{3,1}(\mathbb{R})$. On écrit $AV_3=2V_3+V_2 \iff (A-2I_3)V_3=V_2 \iff CV_3=V_2$ et on cherche V_3 sous forme indéterminée $V_3=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

On a donc le système : $\begin{cases}-y+z=0\\ x-2y+2z=1\\ x-y+z=1\end{cases} \iff \begin{cases}z=y\\ x=1\end{cases}$ et on choisit par exemple le vecteur $V_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ qui convient. Reste à vérifier que $P=\ (V_1|V_2|V_3)$ est bien inversible : $\det(P)=1\neq 0$.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

On peut affirmer que : $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$. On peut alors calculer P^{-1} si besoin.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

- Applications :

- Calcul des puissances d'une matrice :

On convient que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $A^0 = I_n$.

- Lorsque A est diagonalisable, $A = PDP^{-1}$ avec $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ alors on a : $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$ et par récurrence évidente :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \boxed{A^k = PD^kP^{-1}} \text{ avec } D^k = \begin{pmatrix} {\lambda_1}^k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & {\lambda_n}^k \end{pmatrix}.$$

On peut alors calculer explicitement les coefficients de A^k en effectuant le produit matriciel PD^kP^{-1}.

- Lorsque A est seulement trigonalisable, $A = PTP^{-1}$ avec $P \in \mathcal{G}L_n(\mathbb{K})$ et $T \in \mathcal{TS}_n(\mathbb{K})$, on a encore $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $A^k = PT^kP^{-1}$ mais cette fois T^k n'est pas aussi simple à calculer que D^k. On peut quand même affirmer que :

$$\text{Si } T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ alors } \forall\, k \in \mathbb{N},\ T^k = \begin{pmatrix} {\lambda_1}^k & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & {\lambda_n}^k \end{pmatrix}$$

(mais les coefficients indéterminés ont changé) ce qui se démontrer par récurrence sur l'entier k.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

On peut déterminer les puissances des matrices triangulaires supérieures intéressantes de petites tailles :

- Proposition 12 :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}\ ;\ \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

Preuve : Montrons par exemple la seconde formule, la première se prouvant de manière identique ou bien par récurrence sur n. On peut écrire $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_3 + N$ où

$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On voit que $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0_3$.

De plus, les matrices N et λI_3 commutent, c'est-à-dire $N \times \lambda I_3 = \lambda I_3 \times N$ et donc on a droit à la formule du binôme :

$$T^n = (\lambda I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \times (\lambda I_3)^{n-k} = \lambda^n I_3 + \binom{n}{1}\lambda^{n-1}N + \binom{n}{2}\lambda^{n-2}N^2 + 0_3 + \cdots + 0_3 = \lambda^n I_3 + n\lambda^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}N^2$$ d'où le résultat.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

On en déduit les puissances de la matrice diagonale par blocs :

$$T = \left(\begin{array}{c|cc} \mu & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{array}\right) : \forall\, n \in \mathbb{N},\ T^n = \left(\begin{array}{c|cc} \mu^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{array}\right).$$

Exemple : Calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

On a obtenu précédemment $A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On obtient finalement $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est alors inutile d'aller plus loin dans la plupart des exercices.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

- Systèmes de récurrences linéaires du premier ordre à coefficients constants :

Par commodité d'écriture, on présente ici le s méthodes pour un système de taille 3, les méthode valent bien sûr pour un système de taille quelconque. Il s'agit de déterminer les suites u, v et w d'éléments de $\mathbb{K}$ vérifiant :

(s) : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = a_{11}u_n + a_{12}v_n + a_{13}w_n + b_1 \\ v_{n+1} = a_{21}u_n + a_{22}v_n + a_{23}w_n + b_2 \\ w_{n+1} = a_{31}u_n + a_{32}v_n + a_{33}w_n + b_3 \end{cases}$ où a_{ij} et b_i sont des scalaires, et où u_0, v_0 et w_0 sont éventuellement donnés dans $\mathbb{K}$.

Pour tout entier n on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ de sorte que

$\boxed{(S) \Leftrightarrow X_{n+1} = AX_n + B}$ où $A = \left(a_{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq 3}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

- Cas d'un système homogène. Lorsque $B = 0$ on a $(S) \Leftrightarrow X_{n+1} = AX_n$ et par une récurrence évidente il vient :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0.$$

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

Il suffit d'obtenir A^n. On réduit A en $A = PTP^{-1}$ où T est diagonale ou triangulaire supérieure, suivant si A est diagonalisation ou non (dans le pire des cas on peut toujours trigonaliser A sur $\mathbb{C}$) et alors on a : $X_n = PT^nP^{-1}X_0$.

Exemple :

Déterminer les suites u, v et w définie par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, $w_0 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2w_n \\ w_{n+1} = u_n - v_n + 3w_n \end{cases}$.

Ici, $(S) \Leftrightarrow X_{n+1} = AX_n$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et on a déjà obtenu A^n plus haut, il vient donc :

$$X_n = A^nX_0 = PT^nP^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ n2^{n-1} \\ 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \\ n2^{n-1} \\ n2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n$, $v_n = n2^{n-1}$ et $w_n = n2^{n-1}$. Remarquer qu'on a commencé le calcul par la droite pour éviter d'avoir à multiplier les matrices entre elles, ce qui peut être fastidieux.

- <u>Cas d'un système avec second membre</u>. L'application $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \to (X_{n+1} - AX_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant linéaire, on commence par résoudre le système homogène (sans utiliser les conditions initiales), puis on ajoute une solution particulière du système avec second membre. Ici, on a supposé le second membre B constant, on peut donc chercher une solution (X_n) qui soit constante. La suite constante de valeur X_0 est solution de (S) si et seulement si $X_0 = AX_0 + B$ et donc il existe une solution constante ssi $B \in \mathrm{Im}(A - I_3)$. En particulier, si 1 n'est pas valeur propre de A alors $A - I_3$ est inversible donc le système admet une solution constante.

Si il n'y a pas de solution constante, on en cherche une particulière X_n pour laquelle les suites u, v et w comme des polynômes en n de degré au plus 2 et ainsi de suite. De manière générale, pour un système de taille p, on trouvera une solution particulière en prenant chaque suite comme un polynôme en n de degré au plus p.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

Exemple : Déterminer les suites u et v définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 4v_n + 2 \\ v_{n+1} = -u_n - v_n + 4 \end{cases}$.

En testant on constate que le système n'admet pas de solution particulière constante ni de degré au plus 1, on cherche donc des solutions où u_n et v_n sont des polynômes indéterminés de degré au plus 2 et on trouve, après un calcul fastidieux, que $u_n = 10n^2 - 8n$ et $v_n = -5n^2 + 9n$ sont solutions particulières.

Alors en posant $a_n = u_n - (10n^2 - 8n)$ et $b_n = v_n - (-5n^2 + 9n)$ les suites a et b vérifient $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 4b_n \\ b_{n+1} = -a_n - b_n \end{cases}$. Ainsi on est ramené à un système homogène, qu'on résout en trigonalisant la matrice.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

- Suites récurrentes linéaires à coefficients constants :

On cherche ici à déterminer les suites d'éléments de $\mathbb{K}$ vérifiant une relation de récurrence de la forme :

$$(E) : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_{p-1} u_{n+p-1} + b$$

Où $a_0, \cdots, a_{p-1}$ et b sont des scalaires, et où $u_0, \cdots, u_{p-1}$ sont éventuellement donnés dans $\mathbb{K}$.

- Cas général : on se ramène à un système de récurrences linéaires en posant $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}$

et alors :

$$(E) \Leftrightarrow X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ \vdots \\ u_{n+p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0) & 1 & & (0) \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix} =$$

$AX_n + B$.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

Et ainsi, on est ramené au paragraphe précédent. Cependant, dans le cas où b n'est pas nul, on aura plutôt intérêt à commencer par chercher une solution particulière de (E) en procédant comme suit :

- On cherche d'abord une suite constante $u_n = \alpha$ vérifiant (E). Il y en a une qui convient si et seulement si $a_0 + \cdots + a_{p-1} \neq 1$ et si c'est le cas, la suite constante de valeur $\frac{b}{1-(a_0+\cdots+a_{p-1})}$ convient.
- Si $a_0 + \cdots + a_{p-1} = 1$, on cherche une solution de (E) sous la forme $u_n = \alpha n$. Il y en a une qui convient si et seulement si $a_1 + 2a_2 + \cdots + (p-1)a_{p-1} \neq p$, et on détermine alors α.
- $a_1 + 2a_2 + \cdots + (p-1)a_{p-1} \neq p$, on cherche une solution de (E) sous la forme $u_n = \alpha n^2$ et ainsi de suite. Les relations successives peuvent toutes être vérifiées par les coefficients $a_0, \cdots, a_{p-1}$ et donc on aboutit toujours à une solution de (E) sous la forme $u_n = \alpha n^k$ pour un certain entier k $(k \leq p)$.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

➢ <u>Cas d'une relation d'ordre 2</u> : C'est une équation de la forme :

$$(E) : \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$$

Où a, b et c sont des scalaires fixés et où u_0 et u_1 sont éventuellement donnés dans $\mathbb{K}$.

On commence par se ramener à la relation homogène (H) : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$ en déterminant une solution particulière de (E) comme dans le cas général : on teste successivement $u_n = \alpha$, puis $u_n = \alpha n$, puis $u_n = \alpha n^2$ sachant qu'une se ces trois suites convient forcément.

Ensuite, la solution générale de (H) est donnée par le théorème suivant.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

- Théorème 13 :

L'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ vérifiant : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension 2.
Si l'équation caractéristique $X^2 - aX - b = 0$ possède :

- deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{K}$ alors :

$$\exists\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha {r_1}^n + \beta {r_2}^n.$$

- une racine double r dans $\mathbb{K}$ alors :

$$\exists\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = (\alpha + n\beta) r^n.$$

- deux racines complexes conjuguées (non réelles) $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors :

$$\exists\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = (\alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta) r^n.$$

Eventuellement, on détermine ensuite α et β à l'aide des valeurs initiales u_0 et u_1.

Chapitre 7 : réduction des endomorphismes

Exemple : Suite de Fibonacci.

Il s'agit de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Ici, l'équation caractéristique $X^2 - X - 1 = 0$ admet deux racines réelles distinctes $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or) et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ donc il existe deux réels α et β tels que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha\varphi^n + \beta\psi^n$. Puis $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ donnent le système $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\varphi + \beta\psi = 1 \end{cases}$ d'où on tire facilement $\alpha = \frac{\varphi}{\sqrt{5}}$ et $\beta = -\frac{\psi}{\sqrt{5}}$ et donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}).$$

FIN