CONCOURS DE RECRUTEMENT

D'ELEVES PILOTE DE LIGNE

ANNEE 2017

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Partie I

Question 1 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 1 : Pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, $(aI)^n = a_n I = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$. $(aI)^n \in \mathscr{M}$ et $s\left((aI)^n\right) = a^n$. A est vrai et B est faux.

$J^0 = I$ puis pour $a \in \mathbb{R}^*$, $(aJ)^0 = I \neq 3^{-1}a^0 J$. C et D sont faux.

Question 2 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 2 : $L_2(K) = 6$. Donc, si $K \in \mathscr{M}$, $C_2(K) = C_3(K) = 6$. Ceci impose $u - 1 = 6$ et $v + 8 = 6$ puis $u = 7$ et $v = -2$. Donc, B et C sont faux. Réciproquement, si $u = 7$ et $v = -2$, alors $L_1(K) = 5 \neq 6 = L_2(K)$. Donc, K n'est jamais dans $\mathscr{M}$. A est faux et D est vrai.

Question 3 :

A) VRAI
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 3 :

$$L \in \mathscr{M} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} d+e+z = a+b+c \quad \text{(I)} \\ x+y+t = a+b+c \quad \text{(II)} \\ a+d+x = a+b+c \quad \text{(III)} \\ b+e+y = a+b+c \quad \text{(IV)} \\ c+z+t = a+b+c \quad \text{(V)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = b+c-d \quad \text{(III)} \\ z = a+b+c-d-e \quad \text{(I)} \\ y = a+c-e \quad \text{(IV)} \\ (b+c-d)+(a+c-e)+t = a+b+c \\ c+(a+b+c-d-e)+t = a+b+c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = b+c-d \\ z = a+b+c-d-e \\ y = a+c-e \\ t = -c+d+e \\ t = -c+d+e \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = b+c-d \\ y = a+c-e \\ z = a+b+c-d-e \\ t = -c+d+e \end{array}\right. .$$

Donc, B est faux et C est vrai. Ensuite, L est l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & d & b+c-d \\ b & e & a+c-e \\ c & a+b+c-d-e & -c+d+e \end{pmatrix} = a\left(E_{1,1}+E_{2,3}+E_{3,2}\right)+b\left(E_{1,3}+E_{2,1}+E_{3,2}\right)+c\left(E_{1,3}+E_{2,3}+E_{3,1}+E_{3,2}-E_{3,3}\right)$$
$$= +d\left(E_{1,2}-E_{1,3}-E_{3,2}+E_{3,3}\right)+e\left(E_{2,2}-E_{2,3}-E_{3,2}+E_{3,3}\right).$$

$\mathscr{M} = \text{Vect}\left(E_{1,1}+E_{2,3}+E_{3,2}, E_{1,3}+E_{2,1}+E_{3,2}, E_{1,3}+E_{2,3}+E_{3,1}+E_{3,2}-E_{3,3}, E_{1,2}-E_{1,3}-E_{3,2}+E_{3,3},\right.$ $\left.E_{2,2}-E_{2,3}-E_{3,2}+E_{3,3}\right)$. Donc, $\mathscr{M}$ est un sous-espace de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R}$ de dimension inférieure ou égale à 5.

Ensuite, si $a\left(E_{1,1}+E_{2,3}+E_{3,2}\right)+b\left(E_{1,3}+E_{2,1}+E_{3,2}\right)+c\left(E_{1,3}+E_{2,3}+E_{3,1}+E_{3,2}-E_{3,3}\right)+d\left(E_{1,2}-E_{1,3}-E_{3,2}+E_{3,3}\right)+$ $e\left(E_{2,2}-E_{2,3}-E_{3,2}+E_{3,3}\right)=0$, alors $\begin{pmatrix} a & d & b+c-d \\ b & e & a+c-e \\ c & a+b+c-d-e & -c+d+e \end{pmatrix}$ est la matrice nulle puis $a=b=c=d=$ $e=0$. La famille $\left(E_{1,1}+E_{2,3}+E_{3,2}, E_{1,3}+E_{2,1}+E_{3,2}, E_{1,3}+E_{2,3}+E_{3,1}+E_{3,2}-E_{3,3}, E_{1,2}-E_{1,3}-E_{3,2}+E_{3,3}\right.$ $\left., E_{2,2}-E_{2,3}-E_{3,2}+E_{3,3}\right)$ est libre et est donc une base de $\mathscr{M}$. $\mathscr{M}$ est de dimension 5. A est vrai et D est faux.

Question 4 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 4 : $AJ = \begin{pmatrix} L_1(A) & L_1(A) & L_1(A) \\ L_2(A) & L_2(A) & L_2(A) \\ L_3(A) & L_3(A) & L_3(A) \end{pmatrix}$ et $JA = \begin{pmatrix} C_1(A) & C_2(A) & C_3(A) \\ C_1(A) & C_2(A) & C_3(A) \\ C_1(A) & C_2(A) & C_3(A) \end{pmatrix}$.
Donc, $AJ = JA \Leftrightarrow L_1(A) = L_2(A) = L_3(A) = C_1(A) = C_2(A) = C_3(A) \Leftrightarrow A \in \mathscr{M}$. A est faux et B est vrai.

Si A est dans $\mathscr{M}$, $AJ = \begin{pmatrix} s(A) & s(A) & s(A) \\ s(A) & s(A) & s(A) \\ s(A) & s(A) & s(A) \end{pmatrix} = s(A)J$. C est vrai et D est faux.

Question 5 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 5 : Les coefficients de la ligne i de AB sont les $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} a_{i,k}b_{k,j}$, $1 \leqslant j \leqslant 3$. Donc,

$$L_i(AB) = \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3} a_{i,k}b_{k,j}\right) = \sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} a_{i,k}b_{k,j}\right)\sum_{k=1}^{3}\left(a_{i,k}\sum_{j=1}^{3} b_{k,j}\right) = \sum_{k=1}^{3} a_{i,k}s(B)$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{3} a_{i,k}\right)s(B) = s(A)s(B).$$

De même,

$$C_j(AB) = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3} a_{i,k}b_{k,j}\right) = \sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3} a_{i,k}b_{k,j}\right)\sum_{k=1}^{3} s(A)b_{k,j} = s(A)s(B).$$

Si $(A,B) \in \mathscr{M}^2$, alors $AB \in \mathscr{M}$ et $s(AB) = s(A)s(B)$. A est vrai et B est faux.

Si C inversible, $C \in \mathscr{M} \Leftrightarrow CJ = JC \Leftrightarrow C^{-1}CJC^{-1} = C^{-1}JCC^{-1} \Leftrightarrow JC^{-1} = C^{-1}J \Leftrightarrow C^{-1} \in \mathscr{M}$. Donc D est faux. Ensuite, $S(C)S\left(C^{-1}\right) = S\left(CC^{-1}\right) = S(I) = 1$ et donc $S\left(C^{-1}\right) = s(C)^{-1}$. C est faux.

Partie II

Question 6 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 6 : $I_n + I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1} + x^{2n+3}}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}\left(1+x^2\right)}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 x^{2n+1}\,dx = \frac{1}{2n+2}$. Tout est faux.

Question 7 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 7 : Pour tout x de $[0,1]$, $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$puis en multipliant par $\dfrac{x^{2n+1}}{1+x^2} \geqslant 0$, on obtient pour tout x de $[0,1]$, $0 \leqslant \dfrac{x^{2n+3}}{1+x^2} \leqslant \dfrac{x^{2n+1}}{1+x^2}$. Par positivité et croissance de l'intégration, on en déduit que $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. Donc, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. A est faux et B est vrai.

C et D sont faux car les raisons invoquées n'ont rien à voir avec la conclusion (et de plus en D, pour $x=1$, $\dfrac{x^{2n+1}}{1+x^2}$ ne tend pas vers 0)).

Question 8 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 8 : $0 \leqslant I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\,dx \leqslant \int_0^1 x^{2n+1}\,dx = \frac{1}{2n+2}$. B est vrai puis C est vrai car $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2n+2} \leqslant \dfrac{1}{2n+1}$.

A et D sont nécessairement faux. Vérifions le. $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2} = 0,34\ldots > \frac{1}{3} > \frac{1}{5}$.

Question 9 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 9 : Pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(I_k + I_{k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left((-1)^k I_k - (-1)^{k+1} I_{k+1}\right) = I_0 - (-1)^n I_n$ (somme télescopique). Donc, $(-1)^n I_n = \dfrac{\ln 2}{2} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(I_k + I_{k+1}\right) = \frac{\ln 2}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+2}$ puis

$$2(-1)^n I_n = \ln 2 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

A est faux, C est faux, mais D est vrai car $2(-1)^{n-1}I_n = -\ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ puis B est faux.

Question 10 :
A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 10 : Une intégration par parties fournit

$$I_n = \int_0^1 x^{2n+1} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)(1+x^2)}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \times \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{4(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

A est vrai et le reste est faux.

Question 11 :
A) VRAI
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 11 : $0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\,dx \leqslant \int_0^1 x^{2n+3}\,dx = \frac{1}{2n+4} \leqslant \frac{1}{2n+3}$.

I_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ d'après la question 8, puis $2(-1)^{n-1}I_n$ tend vers 0 (car $\left|2(-1)^{n-1}I_n\right| = 2I_n$) et donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ tend vers $\ln 2$ d'après la question 9. Donc, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$. A, B et C sont faux et D est vrai.

Question 12 :
A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 12 : $0 \leqslant \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\,dx \leqslant \frac{1}{(n+1)\times(2n+4)} \leqslant \frac{1}{2n^2}$. En particulier, quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\,dx = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

D'après les questions 9 et 10, $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2 = 2(-1)^{n-1}I_n = 2(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{4(n+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 2(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$. Donc, B est vrai et A et D sont faux. Pour C, $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} - \ln 2 = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2 \sim -2\ln 2$.

Partie III

Question 13 :
A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 13 : On note C_n l'événement « on lance la pièce C au n-ème lancer » de probabilité p_n et donc $\overline{C_n}$ l'événement « on lance la pièce D au n-ème lancer » de probabilité $1 - p_n$.

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p\left(C_{n+1}\right) = p\left(C_n\right) \times p_{C_n}\left(C_{n+1}\right) + p\left(\overline{C_n}\right) \times p_{\overline{C_n}}\left(C_{n+1}\right) \\ &= p_n \times \frac{1}{2} + (1 - p_n) \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

C est vrai et le reste est faux.

Question 14 :
A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 14 : $x = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$. $p_{n+1} - \frac{2}{5} = \frac{1}{6}p_n - \frac{1}{15} = \frac{1}{6}\left(p_n - \frac{2}{5}\right)$. Puis $p_n = \frac{2}{5} + \left(\frac{1}{6}\right)^n\left(p_0 - \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5} + \left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5} + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^n$. B est vrai et A, C et D sont faux.

Question 15 :
A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 15 : $p\left(F_n\right) = p\left(C_n\right) \times p_{C_n}\left(F_n\right) + p\left(\overline{C_n}\right) \times p_{\overline{C_n}}\left(F_n\right) = \frac{1}{2}p_n + \frac{2}{3}\left(1 - p_n\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}p_n$ et donc

$$p\left(F_n\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right) = \frac{3}{5} - \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}.$$

Tout est faux.

Question 16 :
A) VRAI
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 16 : $p_{n+1} = p\left(K_n\right) \times p_{K_n}\left(K_{n+1}\right) + p\left(A_n\right) \times p_{A_n}\left(K_{n+1}\right) + p\left(N_n\right) \times p_{N_n}\left(K_{n+1}\right) = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n$.
De même, $q_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n$ et $r_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{4}r_n$.

Donc, $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$ puis

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 45/100 \\ 25/100 \\ 30/100 \end{pmatrix},$$

ou aussi $\begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45/100 & 25/100 & 30/100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}^n$.

A et C sont vrais et B et D sont faux.

Question 17 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 17 : Deux matrices semblables ont même trace. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{5}{6} < 1$ et $1+\frac{1}{12}+\frac{1}{4} > 1$ et $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1$ et $1+\frac{1}{12}-\frac{1}{4} < 1$. Donc, A et C sont faux.

On pose $M = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$PQ = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc, $Q = P^{-1}$.

$$\begin{aligned} P\,\mathrm{diag}\left(1, \frac{1}{12}, -\frac{1}{4}\right) P^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1/6 & 0 \\ 4 & -1/12 & -1/4 \\ 4 & -1/12 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = M. \end{aligned}$$

B est vrai.

$$\begin{aligned} P\,\mathrm{diag}\left(1, \frac{1}{12}, \frac{1}{4}\right) P^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1/6 & 0 \\ 4 & -1/12 & 1/4 \\ 4 & -1/12 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bullet & 1/4 & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D est faux.

Question 18 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 18 : $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/12)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1/4)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.
Quand n tend vers $+\infty$, A^n tend vers

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/11 & 3/11 & 3/11 \\ 4/11 & 4/11 & 4/11 \\ 4/11 & 4/11 & 4/11 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

puis $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$ tend vers

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/11 & 3/11 & 3/11 \\ 4/11 & 4/11 & 4/11 \\ 4/11 & 4/11 & 4/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 45/100 \\ 25/100 \\ 30/100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/11 \\ 4/11 \\ 4/11 \end{pmatrix}.$$

C est vrai et le reste est faux.

Partie IV

Question 19 :
A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 19 : $(xz-yt)^2+(yz+xt)^2 = x^2z^2+y^2t^2+y^2z^2+x^2t^2 = \left(x^2+y^2\right)\left(z^2+t^2\right)$. Si maintenant, $(a,b) \in S_2(A)$, alors il existe $(x,y,z,t) \in A^4$ tel que $a = x^2+y^2$ et $b = z^2+t^2$ et donc $ab = \left(x^2+y^2\right)\left(z^2+t^2\right) = (xz-yt)^2+(yz+xt)^2$. L'énoncé permet de supposer que $+$ et $\times$ sont des lois internes dans A et donc $xz-yt$ et $yz+xt$ sont dans A puis $ab \in S_2(A)$. D est vrai.

$(xz-yt)^2+(yz-xt)^2 = x^2z^2+y^2t^2+y^2z^2+x^2t^2-2xyzt \neq \left(x^2+y^2\right)\left(z^2+t^2\right)$. A est faux.

A n'a aucune raison d'être un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ et donc les modules n'ont pas de sens. B et C sont faux.

Question 20 :
A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 20 : ($\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ est au programme de maths spé et pas de maths sup). $0^2 \equiv 0$ $[8]$ ou encore $\overline{0}^2 = \overline{0}$. $\overline{1}^2 = \overline{1}$, $\overline{2}^2 = \overline{4}$, $\overline{3}^2 = \overline{1}$, $\overline{4}^2 = \overline{0}$, $\overline{5}^2 = \overline{1}$, $\overline{6}^2 = \overline{4}$ et $\overline{7}^2 = \overline{1}$. Donc, $S_1(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{4}\right\}$. B et C sont faux.

$\overline{0}+\overline{0} = \overline{0}$, $\overline{0}+\overline{1} = \overline{1}$, $\overline{0}+\overline{4} = \overline{4}$, $\overline{1}+\overline{1} = \overline{2}$, $\overline{1}+\overline{4} = \overline{5}$ et $\overline{4}+\overline{4} = \overline{0}$. Donc, $S_2(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}\right\}$.

Les éléments de $S_3(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$ sont les sommes d'un élément de $S_1(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$ et $S_2(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$. On obtient $S_3(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\right\}$. A est vrai et D est faux.

Question 21 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 21 : Le carré d'un nombre pair est pair et le carré d'un nombre impair est impair.
$2^2+2^2+2^2+2^2 \equiv 0[8]$. Donc, a, b, c et d peuvent être tous pairs. B et C sont faux.
Si un ou trois des nombres, a, b, c et d, sont impairs, alors un ou trois des nombres a^2, b^2, c^2 et d^2, sont impairs, puis $a^2+b^2+c^2+d^2$ est impair et en particulier non divisible par 8.
Reste le cas où a et b sont impairs et c et d sont pairs. $a^2+b^2+c^2+d^2 = (2n+1)^2+(2m+1)^2+c^2+d^2 = 4\left(n^2+m^2\right)+2+c^2+d^2 \equiv 0+2+0+0\ [4]$. Ainsi, $a^2+b^2+c^2+d^2 \equiv 2[4]$ ou encore $a^2+b^2+c^2+d^2 = 2(2N+1)$ et en particulier, $a^2+b^2+c^2+d^2 \not\equiv 0[8]$. Finalement, a, b, c et d sont forcément pairs. D est vrai et A est faux.

Question 22 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 22 : D'après la question 20, un nombre congru à 7 modulo 3 ou encore à -1 modulo 8 n'est pas la somme de trois carrés parfaits d'entiers. Donc, si $n \equiv -1\ [8]$, $n \notin S_3(Z)$. Donc, A et C sont faux.

Si $n \in S_3(\mathbb{Q})$, n est la somme de 3 carrés de rationnels, mis sous forme irréductible. On réduit ces carrés au même dénominateur puis on multiplie les deux membres de l'égalité par ce carré de dénominateur. On obtient une égalité du type $nd^2 = a^2+b^2+c^2$ où a, b, c et d sont des entiers ce qui s'écrit $a^2+b^2+c^2-nd^2=0$. On passe modulo 8 et on obtient $a^2+b^2+c^2+d^2 \equiv 0\ [8]$.

D'après la question précédente, a, b, c et d sont des entiers pairs ce qui contredit l'irréductibilité des trois rationnels de départ. Donc, $n \notin S_3(\mathbb{Q})$. B est vrai et D est faux.

Question 23 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 23 : $3 = 1^2+1^2+1^2$ est dans $S_3(\mathbb{Z})$ et donc dans $S_3(\mathbb{Q})$. $5 = 2^2+1^2+0^2$ est dans $S_3(\mathbb{Z})$. Mais $3 \times 5 = 15$ n'est ni dans $S_3(\mathbb{Z})$ ni dans $S_3(\mathbb{Q})$ car $15 \equiv -1\ [8]$. Donc, $S_3(\mathbb{Z})$ et $S_3(\mathbb{Q})$ ne sont pas multiplicatifs. B est vrai et A, C et D sont faux.

Partie V

Question 24 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 24 : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Donc, tout est faux.

Question 25 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 25 : En développant suivant la première ligne, on a $\det(P) = 1 \times 2 + 1 \times 0 = 2 \neq 0$ (D est faux). Donc, P est inversible.

$$\begin{cases} u_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ u_2 = e_2 + e_3 \\ u_3 = e_1 + 2e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_2 = -e_3 + u_2 \\ e_1 = -2e_3 + u_3 \\ u_1 = (-2e_3 + u_3) + (-e_3 + u_2) + e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_3 = \dfrac{1}{2}(-u_1 + u_2 + u_3) \\ e_2 = \dfrac{1}{2}(u_1 + u_2 - u_3) \\ e_1 = u_1 - u_2 \end{cases}.$$

Donc, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. A est vrai et B, C et D sont faux.

Question 26 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) VRAI

Explication 26 : P est inversible et donc (u_1, u_2, u_3) est une base. (u_1, u_2, u_3) est génératrice de E de cardinal 3 et donc est une base de E. C et D sont vraies. A et B sont fausses car les raisons invoquées sont fausses ou insuffusantes.

Question 27 :

A) FAUX
B) VRAI
C FAUX
d) FAUX

Explication 27 : Q est la matrice dans la base $\mathcal{B}'$ de la projection p_F sur $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ parallèlement à $G = \text{Vect}(u_3)$ et Q' est la matrice dans la base $\mathcal{B}'$ de la projection p_G sur $G = \text{Vect}(u_3)$ parallèlement à $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$.

On sait que $p_F^2 = p_F$, $p_G^2 = p_G$, $p_F p_G = p_G p_F = 0$ et $p_F + p_G = Id_E$. Donc, B est vrai et A, C et D sont faux.

Question 28 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 28 : On sait que $F = \text{Im}(p_F) = \text{Ker}(p_G)$ et $G = \text{Im}(p_G) = \text{Ker}(p_F)$ et de plus, $\dim(F) = 2$ et $\dim(G) = 1$. D est vrai et A, B et C sont faux.

Question 29 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 29 : $Q' = P^{-1}A_GP$ et donc

$$A_G = PQ'P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

puis

$$A_F = I_3 - A_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tout est faux.

Partie VI

Question 30 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 30 : En posant $v = au$ et donc $u = \dfrac{v}{a}$, $du = \dfrac{dv}{a}$, $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{1+a^2u^2}\,du = \int_0^{at} \frac{1}{1+v^2}\,\frac{dv}{a} = \frac{1}{a}\,\mathrm{Arctan}(at)$. B est vrai et le reste est faux.

Question 31 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 31 : $x > 0$ puis $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cos^2(t) + x\sin^2(t) > 0$. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel t et tout $k \in \mathbb{Z}$, $f(t + k\pi) = f(t)$. On étudie et on construit le graphe de f sur un intervalle de longueur π comme $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ou aussi $[0, \pi]$ puis on obtient la courbe complète par translations de vecteurs $k\pi\overrightarrow{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(-t) = f(t)$. C_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On étudie et on construit sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ puis on complète par réflexion d'axe (Oy) puis translations de vecteurs $k\pi\overrightarrow{i}$, $k \in \mathbb{Z}$. B est vrai.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(\pi - t) = f(t)$. C_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et aussi par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$. On étudie et on construit sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ puis on complète par réflexion d'axe la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ puis translations de vecteurs $k\pi\overrightarrow{i}$, $k \in \mathbb{Z}$. C est vrai.

Les deux autres ne fournissent pas la courbe complète.

Question 32 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 32 : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t

$$f'(t) = -\frac{-2\sin t\cos t + 2x\sin t\cos t}{\left(\cos^2 t + x\sin^2 t\right)^2} = \frac{2(1-x)\sin t\cos t}{\left(\cos^2 t + x\sin^2 t\right)^2}.$$

D est vrai et le reste est faux.

Question 33 :

A) VRAI
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 33 : • Si $x = 1$, f' est nulle. Si $x \neq 1$, $f'(t) = (1-x)\dfrac{\sin(2t)}{\left(\cos^2 t + x\sin^2 t\right)^2}$.

• Si $0 < x < 1$, f' est strictement positive sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, f est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, puis strictement décroissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$ par symétrie. f admet un minimum sur $[0, \pi]$ égal à $f(0) = \dfrac{1}{x}$ qui est encore minimum sur $\mathbb{R}$. D'autre part, f' s'annule en les $\dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. En les points d'abscisses $\dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, C_f admet une tangente parallèle à (Ox).

• Si $x > 1$, f admet un maximum sur $\mathbb{R}$ égal à $\dfrac{1}{x}$ et en les points d'abscisses $\dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, C_f admet une tangente parallèle à (Ox). A et B sont vrais et C et D sont faux.

Question 34 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 34 : f est π-périodique et paire. Donc,

$$I = \int_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2 t + x\sin^2 t}\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 t + x\sin^2 t}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 t + x\sin^2 t}\,dt.$$

A est vrai et B est faux. C est faux et D est vrai

Question 35 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 35 : Soit $a \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On pose $u = \tan t$ et donc $du = \dfrac{dt}{\cos^2 t}$.

$$H(a) = \int_0^a \frac{1}{1 + x\tan^2 t} \times \frac{dt}{\cos^2 t} = \int_0^{\tan(a)} \frac{1}{1 + xu^2}\,du.$$

B est vrai et le reste est faux.

Question 36 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 36 : Pour $a \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$,

$$H(a) = \int_0^{\tan(a)} \frac{1}{1 + \left(\sqrt{x}u\right)^2}\,du = \left[\frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x}u\right)\right]_0^{\tan(a)} = \frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x}\tan(a)\right).$$

A et B sont faux.

Quand x tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures, $\sqrt{x}\tan(a)$ tend vers $+\infty$ puis $H(a) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x}\tan(a)\right)$ tend vers $\dfrac{\pi}{2\sqrt{x}}$. Par suite,

$$I = 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 + x\sin^2 t}\, dt = 2\lim_{a\to\frac{\pi}{2}} H(a) = \frac{\pi}{\sqrt{x}}.$$

C est vrai et D est faux.

