L'essentiel du cours.

Théorie naïve des ensembles.

1. Définir de manière précise un ensemble dépasse très largement l'objectif de ce cours. On utilise donc la notion intuitive de collection d'objets.

Chaque objet de la collection s'appelle élément de l'ensemble.

Pour définir un ensemble, on peut le nommer en extension ou le définir à partir d'une propriété (mathématique). Cela s'appelle la définition en compréhension.

On note $a \in A$ le fait qu'un élément a appartienne à un ensemble A. La négation de l'appartenance se note $\notin$.

2. L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est l'ensemble qui ne contient aucun élément.

3. Un ensemble A est inclus dans un ensemble B, noté $A \subset B$, si tout élément de A appartient à B.

Deux ensembles A et B sont égaux, noté $A = B$, si l'on a la double inclusion $A \subset B$ et $B \subset A$.

4. On définit plusieurs opérations sur les ensembles. Soit A et B deux sous ensembles d'un ensemble E.

- l'intersection $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$.
- l'union $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
- le complémentaire $\overline{A} = \{x \in E / x \notin A\}$.
- la différence $A \backslash B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$.

5. On montre alors plusieurs propriétés. Soit A, B, C trois sous ensembles de l'ensemble E.

a) La distributivité de l'union sur l'intersection : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

b) La distributivité de l'intersection sur l'union : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

c) La caractérisation de la différence : $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.

d) Les lois de Morgan, qui permettent de lier complémentaire, union et intersection :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ et } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Ces formules se généralisent à un nombre fini de sous ensembles.

5. Si un ensemble A possède un nombre fini n d'éléments, on appelle n son cardinal, noté $\mathrm{card}(A)$.

6. Si A, B sont des ensembles finis et vérifient $A \cap B = \emptyset$, alors $\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B)$.

Dans le cas général, $\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B)$.

7. Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble formé de tous les sous ensembles de E. Si E est de cardinal n, alors $\mathcal{P}(E)$ est de cardinal 2^n.